Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. В. БАТЫРЕВ

К ВОПРОСУ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 4 XI 1950)

1. На плоскости комплексного переменного z будем рассматривать замкнутое множество K, дополнение которого представляет из себя односвязную область G, содержащую бесконечно удаленную точку. Пусть на K задана функция $f(z)$. Если $f(z)$ непрерывна на K, то среди полиномов степени n существует один такой $p_n(z)$, что $\max\limits_{z\in K}|f(z)-p_n(z)|$ будет наименьшим по сравнению с другими полиномами той же степени. Обозначим $\max\limits_{z\in K}|f(z)-p_n(z)|=\mathscr{E}_n(f;K)$.

Монотонно убывающая последовательность чисел

$$\mathscr{E}_0(f;\ K),\ \mathscr{E}_2(f;\ K),\ \ldots,\ \mathscr{E}_n(f;\ K),\ \ldots$$

характеризует весьма многие аналитические свойства $f(z)$.

Для выяснения этого отобразим конформно область G на область, внешнюю к кругу с центром в точке $t=0$ на плоскости t. Отображающую функцию $t=\psi(z)$ нормируем условиями $\psi(\infty)=\infty$, $\psi'(\infty)=1$; радиус r круга, полученного при этом отображении, называется внешним конформным радиусом K. Если на плоскости t взять окружность, концентрическую рассмотренной, с радиусом $\rho>r$, то на плоскости z ей будет соответствовать замкнутая аналитическая кривая C_ρ.

Если взять главную часть $[\psi(z)]^n$ в окрестности бесконечно удаленной точки, то получится полином $P_n(z)$ степени n с коэффициентом при z^n, равным единице. Это полином Фабера для множества K.

Как известно ([1]), эти полиномы обладают тем свойством, что всякую функцию $f(z)$, аналитическую на K (т. е. внутри некоторого C_ρ), можно разложить единственным образом в ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nP_n(z)$, сходящийся абсолютно и равномерно на K.

Известна ([2]) следующая теорема Бернштейна, сформулированная в несколько измененном виде:

Теорема. *Для того чтобы непрерывная на K функция $f(z)$ была аналитической в области, ограниченной кривой C_R $(R>r)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f;\ K)}=\frac{r}{R}.$$

Оказывается, что поведение $\mathcal{E}_n(f;\ K)$ можно уточнить, если известен характер особых точек $f(z)$, расположенных на C_R.

Для этой цели докажем теорему.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ является аналитической на K, то имеют место неравенства*

$$|a_{n+1}|\, r^{n+1} \leqslant \mathcal{E}_n(f;\ K) \leqslant A \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\, r^k, \tag{1}$$

где A — постоянная величина, зависящая только от K, a_k — коэффициенты разложения функции $f(z)$ в ряд по полиномам Фабера.

Известно ([1]), что для полиномов Фабера имеет место оценка $\max\limits_{z\in K} |P_n(z)| \leqslant Ar^n$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{E}_n(f;\ K) \leqslant \max_{z\in K} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(z) \right| \leqslant A \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\, r^k.$$

С другой стороны, рассматривая функцию $F(z) = f(z) - p_n(z)$, имеем $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k P_k(z)$, где $b_k = a_k$ при $k > n$ $b_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{F[\varphi(t)]}{t^{k+1}}\, dt$ или $|b_k| \leqslant \frac{\mathcal{E}_n(f;\ K)}{r^k}$.

В частности, $\mathcal{E}_n(f;\ K) \geqslant |a_{n+1}|\, r^{n+1}$, ч. и т. д.

2. Применим доказанную теорему для уточнения поведения $\mathcal{E}_n(f;K)$.

Теорема 2. *Если функция $f(z)$ имеет на C_R только полюсы, наивысший из порядков которых равен q, то существуют две такие постоянные A и B, что*

$$An^{q-1}\left(\frac{r}{R}\right)^n \leqslant \mathcal{E}_n(f;\ K) \leqslant Bn^{q-1}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Рассмотрим доказательство теоремы для случая одного полюса 1-го порядка. По условию теоремы функция $f[\varphi(t)]$ будет аналитической в кольце $r < |t| < R$ и на окружности $|t| = R$ будет иметь только один полюс 1-го порядка. Разлагая эту функцию в ряд Лорана, заметим, что a_n будет коэффициентом при t^n в этом разложении $(n \geqslant 0)$

$$f[\varphi(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{t^n}. \tag{2}$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ является функцией, аналитической в области $|t| < R$, и на окружности круга сходимости будет иметь только один полюс 1-го порядка. Представляя этот ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{c}{1-\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n t^n,$$

имеем

$$a_n = c\omega^n (1 + \alpha_n),$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Применяя теперь теорему 1, получим доказательство теоремы 2 в рассматриваемом случае.

Аналогично получим теорему для логарифмических особых точек.

Теорема 3. *Если функция $f(z)$ имеет на C_R только логарифмические особые точки, то существуют две такие постоянные A и B, что*

$$A\frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n \leqslant \mathscr{E}_n(f;\,K) \leqslant B\frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

3. Из теоремы Бернштейна следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f;\,K)}=0$, то функция $f(z)$ целая. В этом случае поведение $\mathscr{E}_n(f;\,K)$ может быть связано с порядком и типом этой целой функции. Для этой цели может быть использована теорема 1 и равенство (2).

Для рассматриваемого случая ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ будет представлять целую функцию. Убедимся, что ее порядок и тип совпадают с порядком и типом $f(z)$. Для этого необходимо доказать, что в определении порядка и типа вместо $M(\rho)=\max\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$ можно взять $M_1(\rho)=\max\limits_{z\in C_\rho}|f(z)|$.

Замечая, что $\frac{\psi(z)}{z}$ и $\frac{z}{\psi(z)}$ аналитические функции в окрестности бесконечно удаленной точки и равны там единице, и используя принцип максимума модуля, заключаем, что существуют такие A и B, что

$$A|\psi(z)|<|z|<B|\psi(z)|$$

или

$$A\rho<|z|<B\rho \text{ для } z\in C_\rho.$$

При $\rho\to\infty$ $A\to 1$ и $B\to 1$. Это доказывает утверждение.

Применяя теперь подсчет по теореме 1, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 4. *Если $f(z)$ — целая функция порядка p и типа σ, то на любом замкнутом множестве K с односвязным дополнением и внешним конформным радиусом r $\mathscr{E}_n(f;\,K)$ удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/p}\sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f;\,K)}=r(e\sigma p)^{1/p}.$$

Теорема 5. *Если на замкнутом множестве K с односвязным дополнением и внешним конформным радиусом r $\mathscr{E}_n(f;\,K)$ удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/p}\sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f;\,K)}=r(e\sigma p)^{1/p},$$

то $f(z)$ целая функция порядка p и типа σ.

Теорема 6. *Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f;\,K)}=0$, то $f(z)$ целая функция и ее порядок и тип могут быть определены по формулам*

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\frac{1}{\mathscr{E}_n(f;K)}},\quad \sigma=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\mathscr{E}_n^p(f;\,K)}}{r^p e p}.$$

Поступило
8 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Faber, Journ. reine u. angewandte Math., 150. 86 (1920). [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций, ч. I, 1937.