

7. Золотарев П.П., Николаевский В.Н. Термодинамический анализ нестационарных процессов в насыщенных жидкостью и газом деформируемых пористых средах // Теория и практика добычи нефти: Сб. науч. тр. / ВНИИ. М., 1966. С.49 - 61.

ПРИСТЕНОЧНОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ВИХРЯ СКОРОСТИ В ДВУХМЕРНОМ ПОТОКЕ

О. Н. Шабловский

1. Уравнения динамики жидкости и граничные условия.

Плоское двухмерное неустановившееся течение несжимаемой сплошной среды определяется уравнениями [1]:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad i, k = 1, 2 \quad (1)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \phi + q_v, \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \lambda = \lambda(T, p), \quad \mu = \mu(T, p).$$

Классическая модель вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости имеет вид

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

Реологическое уравнение состояния вязкоупругой жидкости Максвелла возьмем в форме записи [2]

$$\tau_{ij} + \gamma \frac{d\tau_{ij}}{dt} = 2\mu e_{ij}, \quad 2e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad (3)$$

используя оператор субстанциональной производной $d/dt = d/dt + v_k \partial/\partial x_k$.

Исследование возникновения и распространения завихренности на основе модели (3) имеет большое значение не только с точки зрения приложений в реологии, но и принципиально важно с методологической позиции. А именно: учет релаксации вязких напряжений позволяет рассмотреть эволюцию гидродинамических параметров под влиянием конечной скорости распространения возмущений [3].

При постановке граничных задач применяем наряду с традиционным условием прилипания жидкости условия скольжения [2;4]. Явление проскальзывания жидкости на стенке наблюдается при течении неニュтоновских жидкостей типа (3) - растворы и расплавы полимеров, а также при движении ньютоновской жидкости вдоль пористой границы. Условия скольжения и

температурного скачка применяем в общем виде, по своей структуре аналогичном тому, что получен в кинетической теории газов [5]:

$$\vec{v} - \zeta \frac{\partial \vec{v}_\tau}{\partial \vec{n}} - \zeta_v \frac{\partial T}{\partial \vec{\tau}} = \vec{v}_w, \quad T = T_w + \zeta_T \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} - \chi \frac{\partial v_\tau}{\partial \vec{\tau}}, \quad (4)$$

где \vec{v}_w , T_w - скорость и температура границы; коэффициенты ζ , ζ_v , ζ_T , χ зависят от свойств жидкости и стенки и характеризуют модель скольжения; $\vec{\tau}$, \vec{n} - единичные векторы касательной и нормали в точке границы.

Линия сильного разрыва в потоке несжимаемой жидкости может иметь разнообразную физическую природу. В частности, она является эффективной моделью технологического устройства, при протекании через которое параметры жидкости (плотность, вязкость, давление и т.д.) резко меняются. Динамические условия совместности на линии сильного разрыва имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \left\{ \rho(N - v_n) \right\} &= 0, \quad \left\{ \bar{p}_n + \rho \vec{v} (N - v_n) \right\} = 0, \\ \left\{ \bar{p}_n \cdot \vec{v} + \rho(N - v_n) \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + H \right) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Гидродинамические свойства автомодельного течения на двухмерной подвижной границе. Для полных уравнений движения (1) вязкой жидкости можно построить скалярный потенциал $\xi = \xi(x, y, t)$ - независимую переменную лагранжева типа:

$$\begin{aligned} \xi_x &= -v_1 - A_y, \quad \xi_y = -v_2 \neq 0, \quad \xi_t = (p' - \tau_{22})\rho^{-1} + v_2^2 + \zeta_x, \\ Y + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{V_2(X, \xi, t)} &= Y_0(X, t), \\ \frac{\partial Y_0}{\partial X} &= \left(\frac{\xi_x}{V_2} \right)_{\xi=\xi_0}, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \left(\frac{\xi_t}{V_2} \right)_{\xi=\xi_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $P = P' + \rho B(t)$; A , ζ - вспомогательные функции. Подробные формулы преобразования уравнений (1) к переменным x, ξ, t имеются в [6; 7]. Отметим свойства функций $A(x, y, t)$, $\xi(x, y, t)$: 1) для завихренности жидкости имеем $2\omega = \partial^2 A / \partial Y^2$; 2) условие непротекания $V_n = 0$ ($V_1 \xi_x + V_2 \xi_y + \xi_t$) $_{\xi=\xi_0} = 0$ соответствует условию полной интегрируемости уравнения $d\xi = 0$; 3) вдоль непроницаемой линии $\xi = \xi_0 = \text{const}$ выполняется условие прилипания $V_\tau = 0$, если $(\partial A / \partial Y)_{\xi=\xi_0} = 0$.

Для изотермического движения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости (1),(2) был рассмотрен автомодельный вариант:

$$\alpha = X / (t + B)^{\frac{1}{2}}, \quad B > 0, \quad \mu, \rho - \text{const}, \quad (7)$$

$$p - p_\infty = \rho p(\alpha, \beta)/(t + B), \quad V_i = \bar{V}_i(\alpha, \beta)/(t + b)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Для полных уравнений Навье-Стокса, описывающих двухмерное плоское неизотермическое движение совершенного газа ($P = R\rho T$), изучалась автомодельность вида

$$\varepsilon = \frac{X}{t + b}, \quad \varpi = \frac{y}{t + b}, \quad b > 0, \quad C_p, C_v - \text{const}, \quad \lambda = \lambda(T), \quad (8)$$

$$\rho = \bar{\rho}/(t + b), \quad p = \bar{p}/(t + b), \quad \tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij}/(t + b), \quad \mu = \mu(T),$$

где функции, отмеченные чертой, а также V_1, V_2, T зависят от ε, ϖ .

Для каждого из вариантов (7) и (8) были определены скалярные потенциалы типа (6): $\xi = \xi(\alpha, \beta)$ и $\xi = \xi(\varepsilon, \varpi)$. После этого в плоскостях α, ξ и ε, ξ строились решения в виде функциональных рядов в окрестности $\xi = 0$. В обоих случаях граница $\xi = 0$ является непроницаемой, и на ней тангенциальная составляющая скорости жидкости (газа) равна нулю. В результате удалось обнаружить новые локальные свойства несжимаемого и сжимаемого течений на непроницаемой нестационарной границе вязкого потока.

Несжимаемая вязкая жидкость. Компоненты вектора вязкого напряжения $\tau_{ni} = \tau_{i1} \cos(n, X) + \tau_{i2} \cos(n, Y)$ в этом случае пропорциональны соответствующим компонентам вектора скорости жидкости: $\xi = 0, \quad \tau_{ni} = 2\mu V_i K, \quad i = 1, 2$. Это значит, что вектор вязких напряжений нормален границе и представляется формулой

$$\xi = 0, \quad \tau_{nn} = 2\mu K \left(V_1^2 + V_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_{nt} = 0, \quad (9)$$

где K - кривизна линии $\xi = 0$ в плоскости X, Y . Вычисления показывают, что завихренность на непроницаемой линии, к которой прилипает жидкость, равна производной от модуля полной скорости по направлению касательной к этой линии:

$$\xi = 0, \quad \omega = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(V_1^2 + V_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (10)$$

Возьмем в каждой точке границы отношение завихренности к произведению модуля полной скорости на кривизну $\omega_* = \left[\omega / K \left(V_1^2 + V_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]_{\xi=0}$ и

отнесем вязкое напряжение к динамическому напору:

$$\tau_* = \left[\tau_{nn} / \rho (V_1^2 + V_2^2) \right]_{\xi=0}; \quad Re_* \left[\rho (V_1^2 + V_2^2)^{\frac{1}{2}} / \mu K \right]_{\xi=0}.$$

Тогда для параметра Рейнольдса получим простое соотношение

$$Re_* \cdot \tau_* = 2. \quad (11)$$

Для $\xi = 0$ имеем $p = p_\infty + \tau_{nn}$, т.е.

$$p_* = \left[(p - p_\infty) / \rho(v_1^2 + v_2^2) \right]_{\xi=0}^{1/2} = \tau_*. \quad (12)$$

где p_* - параметр Эйлера.

Вязкий теплопроводный газ. Так же, как и в несжимаемом случае, завихренность представляется формулой (10), а для составляющих вектора вязких напряжений имеем $\xi = 0$, $\tau_{nn} = p$, $\tau_{nt} = 0$. Изменение плотности частицы газа характеризуется выражением

$$\xi = 0, \quad \rho^{-1} \frac{dp}{dt} = \frac{3}{2} \left[K(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{p}{2\mu(T)} \right]. \quad (13)$$

где K - кривизна границы в плоскости x, y . Здесь первое слагаемое в правой части - кинематический фактор, описывающий сжимаемость среды; второе слагаемое - динамический фактор, обусловленный давлением им вязкостью газа. Если плотность частицы газа постоянная, $(dp/dt)_{\xi=0} = 0$, то (13) соответствует несжимаемому случаю (9). Сравнивая формулы сжимаемого и несжимаемого вариантов, надо учитывать, что в записи формул давлению p газа отвечает разность $p - p_\infty$ для жидкости.

Вектор теплового потока, касательный к непроницаемой теплоизолированной границе ($q_n = 0$), имеет вид

$$\xi = 0, \quad q_t = -\lambda(T_w) \frac{\omega(dT/dt)}{d \left[(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} \right] / dt},$$

где правая часть пропорциональна завихренности и содержит субстанциональные производные от температуры и модуля полной скорости.

Возьмем безразмерные параметры: отношение удельных теплоемкостей

$$\gamma_* = c_p/c_v, \quad \text{число Рейнольдса } Re_* = \left[\rho(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} / \mu K \right]_{\xi=0}, \quad \text{число Эйлера}$$

$$p_* = \left[p / \rho(v_1^2 + v_2^2) \right]_{\xi=0}^{1/2}, \quad \text{число Маха } M_* = \left[(v_1^2 + v_2^2) / \gamma_* R T \right]_{\xi=0}^{1/2}.$$

Расчеты показывают, что

$$Re_* / \gamma_* M_*^2 = 2 - \frac{4}{3} \left[\frac{dp/dt}{\rho K (v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\xi=0}, \quad (14)$$

причем дробь справа описывает вклад сжимаемости отдельной частицы в соотношение между числами Рейнольдса и Маха. С помощью (13) формуле (14) можно придать вид

$$Re_* / \gamma_* M_*^2 = \left[p / K \mu(T) (v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} \right]_{\xi=0} .$$

Если плотности частиц газа различны и постоянны, то (14) дает $Re_* = 2\gamma_* M_*^2$ или, что то же, $Re_* = 2/p_*$. Эта связь по форме записи и физическому смыслу соответствует несжимаемому случаю (11), (12).

Числовые расчеты показывают, что зависимость $Re_* / \gamma_* M_*^2$ от ω_* - монотонно убывающая при фиксированном γ_* . С ростом $\gamma_* \geq 1$ одному и тому же ω_* соответствует большее значение $Re_* / \gamma_* M_*^2$.

3. Эффект скольжения и вихрь скорости. Применение скалярного потенциала вида (6) в качестве независимой переменной позволило рассмотреть некоторые внутренние течения вязких жидкостей и обнаружить новые свойства вихря скорости, проявляющиеся на фоне эффекта пристеночного скольжения. Приведем здесь, опустив промежуточные выкладки, основные результаты.

Изотермическое скольжение ньютоновской жидкости вдоль неподвижной стенки $x = 0$: на линии скалярного потенциала $\xi = \xi_i = \text{const}$ качественное поведение завихренности ω_i в окрестности стенки определяется решением типа фундаментального решения уравнения теплопроводности

$$\omega_i \sim \frac{a_1}{(\pi v t)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{(x - x_1)^2}{4 v t} \right], \quad a_1, x_1 - \text{const.}$$

Это означает, что связь ω_i с кинематической вязкостью v имеет ясно выраженный немонотонный характер: с ростом $v > 0$ завихренность сначала растет, достигает максимума, после чего плавно уменьшается. На стенке зависимость завихренности ω_i от вязкого напряжения $(\tau_{12})_{x=0}$ монотонно возрастающая и близка к линейной.

Неизотермическая автомодельная стадия вязкой релаксации. Вязкоупругая жидкость (3) движется в плоском кольцевом секторе; применяются полярные координаты r, ϕ . Рассматривается температурный интервал, в котором c_p, μ, λ, ρ можно считать постоянными, а время релаксации вязких напряжений зависит от температуры:

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 - \exp \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right], \quad \gamma_1 (T_0 - T) \leq 0, \quad \gamma_0, \gamma_1 - \text{const.}$$

Здесь $T_0(r)$ заранее неизвестна и характеризует жидкость в отрелаксированном состоянии: $T \rightarrow T_0(r), \gamma \rightarrow 0$. Движение жидкости происходит между отрезками лучей $\phi = \phi^i$ и дугами окружностей радиусов $r = r^i, i = 0, 1$, совершающими вращательное движение в одном направлении вокруг центра на неподвижной плоскости с постоянными угловыми скоростями $U^i/r^i \neq 0$. Внешняя и внутренняя дуги проницают; радиальные скорости подачи и протекания жидкости через эти

границы заданы. Температуры дуг ψ^i постоянны. Условия скольжения и температурного скачка (4) записываются в форме $r = r^i$:

$$w - U^i = \zeta^i \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{a^i}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad T - \psi^i = \beta^i \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{b^i}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad 0 < r^0 < r^1,$$

где w - трансверсальная компонента скорости. Изучен автомодельный процесс, в котором все гидродинамические и тепловые параметры течения зависят от двух аргументов: радиуса r и автомодельной переменной $\varphi - Bt$ типа распространяющейся волны. Решение найдено в виде локально сходящихся функциональных рядов по степеням

$$s = \alpha \exp(-k\xi), \quad 0 < \alpha < 1, \quad k < 0, \quad \xi \in (-\infty, 0]; \quad Re < 50; \quad Pr < 20.$$

Формулы нулевого приближения характеризуют распределение термогидродинамических параметров при $\gamma \rightarrow 0$. Анализ решения и числовые расчеты показали, что: 1) для рассматриваемого температурного интервала, в котором вязкость постоянна, завихренность очень слабо реагирует на неизотермичность процесса; 2) связь T/T^0 с $\tau_{r\varphi}/\tau_{r\varphi}^0$ на линии скалярного потенциала вдоль радиуса немонотонная - имеет максимум; 3) температурный скачок на границах зависит прежде всего от разности температур границ и коэффициентов температурного скачка,

$$\frac{T_0(r^0) - \varphi^0}{\varphi^0} = \frac{\beta^1}{(\beta^0 - \beta^1 + r_*)} [\varphi^1 - \varphi^0 + 9Pr v_* r_* - b_*], \quad \frac{r^0}{r^1 - r^0} > 1, \quad (15)$$

$$r_* = \frac{r_0}{3Pr} \left[1 - \left(\frac{r^0}{r^1} \right)^{3Pr} \right], \quad v_* = \frac{4v^2}{3(r^0)^3} + \frac{b_0^2}{5(r^0)^5}, \quad b_* = b_* \left(Pr, \frac{r^0}{r^1} \right),$$

в правой части (15) доминируют члены, связанные в $\varphi^1 - \varphi^0$; по мере увеличения числа Прандтля Pr скачок температур монотонно возрастает; 4) в отрелаксированном состоянии связь завихренности с числом Рейнольдса является линейной, $\gamma \rightarrow 0$, $\omega_0 = Re(\tau_{r\varphi})_0/6$, $Re = \rho_b v_b r_b / \mu_b$; 5) завихренность потока в значительной степени обусловлена кинематическим фактором - угловой скоростью граничных дуг - и монотонно растет с увеличением этой скорости; 6) с ростом коэффициента скольжения ζ модуль завихренности уменьшается; $|\omega|$ резко возрастает у стенки, на которой прилипание проявляется сильнее; 7) связь завихренности с касательным напряжением на стенке близка к линейной как в изотермическом, так и в неизотермическом процессах.

Последние два свойства были отмечены и в случае неизотермического движения ньютоновской жидкости: течение в плоском кольцевом секторе; граничные дуги неподвижны и непроницаемы, на них происходит скольжение жидкости; коэффициенты вязкости и теплопроводности - убывающие степенные функции температуры; для построения скалярного потенциала применялись аргументы α , r , где $\alpha = (t + b)\exp(k\varphi)$, $b > 0$. Представленные примеры

демонстрируют существенное влияние пристеночного скольжения на формирование вихря скорости вязкой жидкости.

4. "Трансзвуковой" эффект для вихря скорости. Уравнение распространения завихренности в стационарном вязкоупругом потоке имеет вид

$$(u^2 - c^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + (v^2 - c^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = F,$$

где $c^2 = \mu/\rho\gamma$ - квадрат скорости волны сдвига. Применяя аналог

газодинамического числа Маха $M = \sqrt{u^2 + v^2}/c$, можно заключить, что при $M = 1$ имеется линия перехода от "дозвукового" $M < 1$ к "сверхзвуковому" $M > 1$ процессу. Некоторые примеры таких течений описаны в обзоре [8]. Укажем здесь новый вид движений, в котором для ω реализуется "трансзвуковое" явление.

Течение происходит в полуполосе вдоль оси ОХ, ограниченной непроницаемой линией $\phi_1: v = v^1 = \text{const}$. Две другие границы такие: линия $s = s^1$ (линия тока $\psi = 0$) непротекаемая, и жидкость скользит вдоль нее, а линия $s = s^0$ (изотермический сильный разрыв) моделирует приток (отток) массы импульса на границе. Уравнения движения сначала записываем в переменных x, ψ , потом переходим к независимым переменным лагранжева типа s, v , где значение $s = \text{const}$ ассоциируется с одной из границ области течения. Алгоритм построения решения в виде сходящихся функциональных рядов аналогичен [3] и описывает процессы, вызванные двухмерным возмущением поперечной скорости v . Приведем некоторые результаты. Отметим индексом d параметры жидкости по другую сторону разрыва:

$u_d, p_d - \text{const}, v_d \equiv 0, (\tau_{ij})_d \equiv 0$. Применяем безразмерные параметры:

$$\omega_* = \omega x_* / u_\infty, \quad Re_\infty = u_\infty x_* / v, \quad M_\infty^2 = w_\infty Re_\infty, \quad w_\infty = \gamma u_\infty / x_*.$$

На линии "звукового" перехода имеем

$$v_c \equiv v^{(1)} \left(1 - M_\infty^2 \right) \left[m_* s^1 - \varphi_0 v^{(1)} \left(s^1 - s^0 \right)^2 \right] / 4 \left(s^1 - s^0 \right) M_\infty^2, \quad v_c \in (0, v^{(1)}),$$

причем выбор интервала $[s^0, s^1]$ производится на основе следующих неравенств:

$$1 - \left(1 - \frac{s^0}{s^1} \right)^2 \frac{\rho_d u_d}{\rho u_\infty} < \frac{4M_\infty^2 \left(1 - \frac{s^0}{s^1} \right)}{m_* \left(1 - M_\infty^2 \right)}, \quad m_* = \frac{\rho u_\infty}{\rho u_\infty - \rho_d u_d}.$$

Если $m_* > 0$, то $\left(1 - M_\infty^2 \right) \left(s^1 - s^0 \right) > 0$, $u_\infty < 0$, $u_d > 0$.

Если $m_* < 0$, то $\left(1 - M_\infty^2 \right) \left(s^1 - s^0 \right) < 0$, $0 > \rho u_\infty > \rho_d u_d$,

$$\rho u_\infty / \rho_d u_d > \left(1 - \frac{s^0}{s^1} \right)^2.$$

Для всех вариантов $\phi_0 v^{(1)} s^1 = \rho_d u_d / (\rho u_\infty - \rho_d u_d)$. Расчеты показывают, что направления скоростей скольжения по обе стороны разрыва оказывают значительное влияние на характер связи ω_*^0 с W_∞ (рис.1,2).

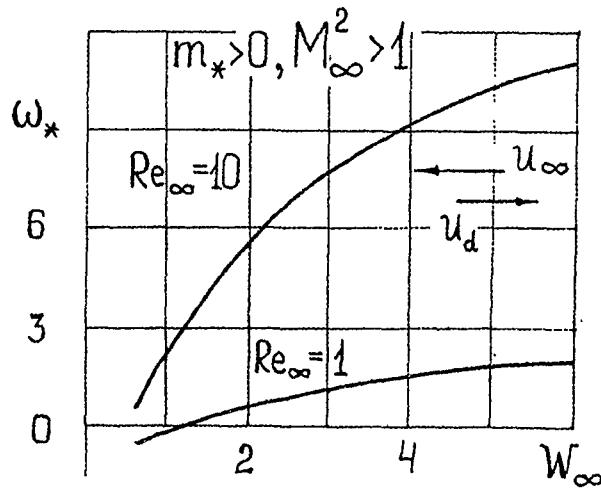


Рис.1

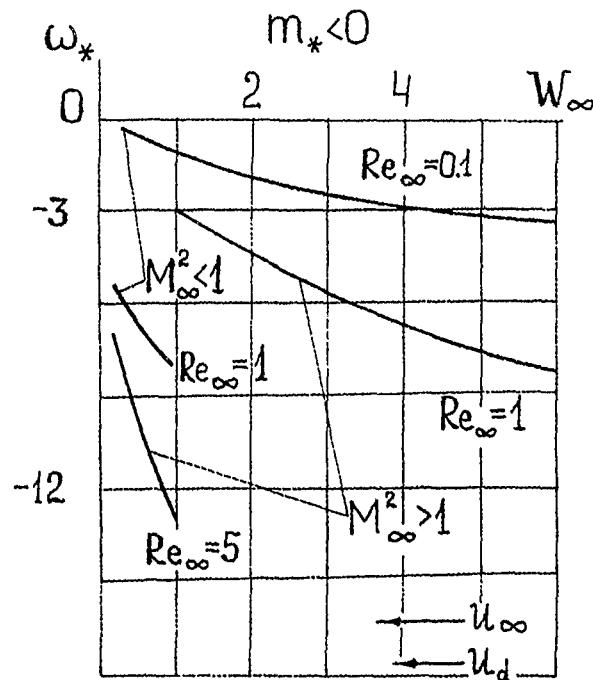


Рис. 2

В качестве непроницаемой границы ϕ_1 применялась также изобара $p = p_1$: жидкость стратифицирована по плотности ($\rho = \rho(\psi)$), выполнено приближение Буссинеска, действует постоянная массовая сила $F_y = F$. В этом случае на линии сильного разрыва $s = s^0$ связь $\omega^0 = (W_\infty)$ чувствительна еще и к ориентации поперечной скорости v^0 и вектора массовой силы (рис.3). Вместе с тем реализация "трансзвукового" эффекта не зависит от направления массовой силы по отношению к сильному разрыву.

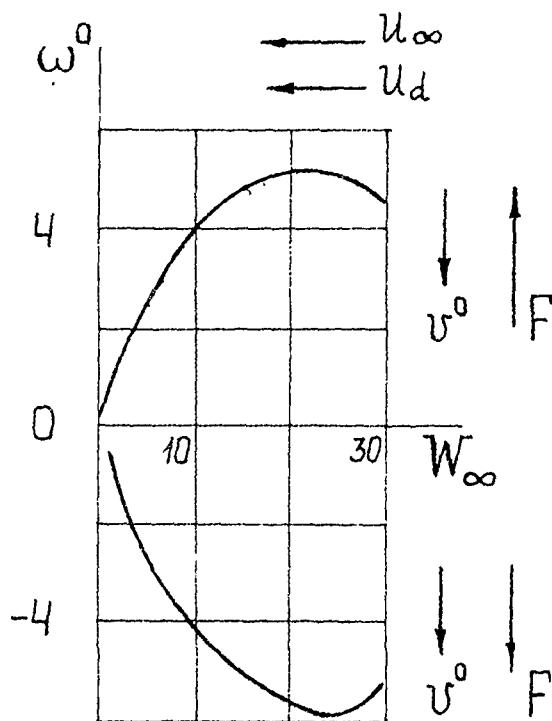


Рис. 3

В заключение отметим, что термочувствительность ω обусловлена прежде всего зависимостью динамической вязкости от температуры. Например, если $\mu \sim (\mu_0 + \mu_1 E)$, $E = \exp(MT)$, то на разрыве (5) имеем

$$\omega^0 \sim \exp(-\mu_1 E^0 / \mu_0).$$

Перечень условных обозначений в статье О.Н. Шабловского "Пристеночное скольжение жидкости и нелинейные свойства вихря скорости в двухмерном потоке":

c_p , c_v - удельная теплоемкость при постоянном давлении, при постоянном объеме; $\{f\}$ - скачок функции при переходе через разрыв; N - скорость перемещения линии сильного разрыва; p - давление; q_v - мощность внутренних источников тепла; T - температура; t - время; $v_1 = u$, $v_2 = v$ - компоненты вектора скорости; $x_1 = x$, $x_2 = y$ - декартовы прямоугольные координаты; γ - время релаксации вязких напряжений; ζ - коэффициент скольжения; λ - коэффициент теплопроводности; μ - коэффициент динамической вязкости; ρ - плотность; τ_{ij} - компоненты девиатора тензора напряжений; F - диссипативная функция; $\omega = (\partial v_2 / \partial x_1 - \partial v_1 / \partial x_2) / 2$ - завихренность; $c_p(T) = dH/dT$.

Индексы: b - масштабы величин при обезразмеривании; независимые переменные в роли нижних индексов - частное дифференцирование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1973. 536 с.
2. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неильтоновских жидкостей. М.: Мир, 1987. 309 с.
3. Шабловский О.Н. Влияние релаксации вязких напряжений на вихревое течение несжимаемой жидкости // Гидромеханика. 1991. № 63. С.35-38.
4. Тарунин Е.Л. Течение вязкой жидкости в замкнутой области при наличии эффектов проскальзывания // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. №1. С.10-16.
5. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
6. Шабловский О.Н. Плоская автомодельная задача о протекании вязкой жидкости через область с подвижными границами // Гидромеханика. 1984. № 49. С.21-25.
7. Шабловский О.Н. Класс плоских автомодельных движений неильтоновской жидкости с нелинейными теплофизическими свойствами // Инж.-физ. журн. 1985. Т.48, № 1. С.129-136.
8. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Гидродинамика неильтоновских жидкостей // Итоги науки и техники. Комплексные и спец. разделы механики / ВИНИТИ. 1991. Т.4. С.3-97.