Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. А. БРАЗМА

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ПУЧКЕ ПРОВОДОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 XI 1950)

§ 1. В предыдущей заметке [1] я рассмотрел основную задачу распространения электромагнитных явлений в пучке проводов, которая заключается в следующем.

Найти решение $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x, t)$, $\mathbf{i}=\mathbf{i}(x, t)$ обобщенной системы телеграфных уравнений с постоянными коэффициентами, записанной в матричном виде так:

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}=\mathbf{R i}+\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \quad-\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}=\mathbf{G u}+\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \tag{1}$$

и удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathbf{u}(0, t)=\mathbf{u}_0=\mathrm{const}, \quad \mathbf{u}(l, t)=0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$\mathbf{u}(x, 0)=0, \quad \mathbf{u}_t'(x, 0)=0. \tag{3}$$

Решение ищется для значений аргументов

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t<\infty. \tag{4}$$

В этой задаче условие (3) можно заменить другим более естественным условием

$$\mathbf{u}(x, 0)=0, \quad \mathbf{i}(x, 0)=0. \tag{5}$$

А. Д. Мышкис сообщил мне доказательство теоремы единственности для непрерывно дифференцируемых решений некоторых подобных задач, а также и доказательство затухания частных решений, полученных мною в предыдущей заметке [1] матричным методом разделения переменных для решения поставленной там задачи. При этом предполагается симметричность и неотрицательная (отчасти и положительная) определенность матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$. Эти предположения обычно удовлетворены.

В настоящей заметке мы рассмотрим новый вид решения системы (1) при граничных условиях (2) и начальных условиях (5). При этом число проводов n мы будем считать произвольным. Таким образом, $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ — квадратные матрицы порядка n, которые мы будем предполагать постоянными, симметричными и положительно определенными.

§ 2. Сперва мы будем искать частные решения системы (1) в виде

$$\mathbf{u}_k=\mathbf{v}_k(t) \sin \frac{k \pi x}{l}, \quad \mathbf{i}_k=\mathbf{j}_k(t) \cos \frac{k \pi x}{l}, \tag{6}$$

где $\mathbf{v}_k(t)$ и $\mathbf{j}_k(t)$ — колонные матрицы, состоящие каждая из n элементов, а k — натуральное. Тогда система (1) переходит в такую:

$$-\frac{k\pi}{l}\mathbf{v}_k = \mathbf{R}\mathbf{j}_k + \mathbf{L}\frac{d\mathbf{j}_k}{dt}, \quad \frac{k\pi}{l}\mathbf{j}_k = \mathbf{G}\mathbf{v}_k - \mathbf{C}\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}. \tag{7}$$

Первое и второе уравнения (7) мы умножим с левой стороны на $\mathbf{L}^{-1}$ и $\mathbf{C}^{-1}$ соответственно и объединим их в одно матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left\|\begin{matrix}\mathbf{j}_k\\ \mathbf{v}_k\end{matrix}\right\| + \mathbf{M}_k\left\|\begin{matrix}\mathbf{j}_k\\ \mathbf{v}_k\end{matrix}\right\| = 0, \tag{8}$$

содержащее постоянную квадратную матрицу порядка $2n$:

$$\mathbf{M}_k = \left\|\begin{matrix}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} & \frac{k\pi}{l}\mathbf{L}^{-1}\\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}\end{matrix}\right\|. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (8) имеет вид [2]:

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{j}_k\\ \mathbf{v}_k\end{matrix}\right\| = e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{b}_k\\ \mathbf{a}_k\end{matrix}\right\|, \tag{10}$$

причем $\mathbf{b}_k$ и $\mathbf{a}_k$ — произвольные постоянные колонные матрицы, состоящие каждая из n элементов. Заметим, что решение (10) справедливо как при простых, так и при кратных элементарных делителях матрицы $\mathbf{M}_k$.

Отсюда получается:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k &= \|0, \mathbf{E}_n\|\, e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{b}_k\\ \mathbf{a}_k\end{matrix}\right\|\sin\frac{k\pi x}{l},\\ \mathbf{i}_k &= \|\mathbf{E}_n, 0\|\, e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{b}_k\\ \mathbf{a}_k\end{matrix}\right\|\cos\frac{k\pi x}{l},\end{aligned} \tag{11}$$

где в выражении прямоугольной матрицы $\mathbf{E}_n$ обозначает единичную матрицу порядка n, а 0 — квадратную матрицу порядка n, состоящую из одних нулей.

Случай $k=0$ приходится рассматривать отдельно. Здесь мы имеем $\mathbf{u}_0 \equiv 0$, а $\mathbf{i}_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{i}_0}{dt} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{i}_0 = 0 \tag{12}$$

с квадратной матрицей $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ порядка n, общее решение которого мы запишем так:

$$\mathbf{i}_0 = \frac{1}{2}e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\mathbf{b}_0. \tag{13}$$

§ 3. Характеристические числа матрицы $\mathbf{M}_k$ отличаются обратным знаком от корней уравнения

$$\left|\begin{matrix}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + \lambda\mathbf{E}_n & \frac{k\pi}{l}\mathbf{L}^{-1}\\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \lambda\mathbf{E}_n\end{matrix}\right| = 0,$$

которое после преобразования

$$\left|\begin{matrix}\mathbf{L} & 0\\ 0 & \mathbf{C}\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + \lambda\mathbf{E}_n & \frac{k\pi}{l}\mathbf{L}^{-1}\\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \lambda\mathbf{E}_n\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\mathbf{R} + \lambda\mathbf{L} & \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n & \mathbf{G} + \lambda\mathbf{C}\end{matrix}\right|$$

переходит в уравнение

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R} + \lambda \mathbf{L} & \frac{k\pi}{l} \mathbf{E}_n \\ -\frac{k\pi}{l} \mathbf{E}_n & \mathbf{G} + \lambda \mathbf{C} \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) является (с другими обозначениями) тем же алгебраическим уравнением с неизвестным λ, которое встречается в заметке ([1]) и для которого А. Д. Мышкис доказал отрицательность вещественной части всех корней (последнее равносильно вышеуказанному затуханию частных решений).

Следовательно, все характеристические числа матрицы $\mathbf{M}_k$ обладают положительной вещественной частью, и поэтому решение (10) является затухающим.

У матрицы же $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$, которая является произведением двух положительно определенных матриц $\mathbf{L}^{-1}$ и $\mathbf{R}$, все характеристические числа положительны. Это утверждение получается на основании такой (известной) теоремы. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — симметричные положительно определенные матрицы, то все характеристические числа матрицы $\mathbf{AB}$ положительны. Нам понадобится впоследствии еще следующее, сообщенное мне М. А. Наймарком, дополнительное свойство, что эта матрица $\mathbf{AB}$ приводима к диагональному виду.

Таким образом, решение (13) оказывается апериодически затухающим.

§ 4. Задача 1 (вспомогательная). Найти решение системы (1) для значений аргументов (4) при граничных условиях

$$\mathbf{u}(0, t) = 0, \quad \mathbf{u}(l, t) = 0 \tag{15}$$

и начальных условиях

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{f}_1(x), \quad \mathbf{i}(x, 0) = \mathbf{f}_2(x). \tag{16}$$

Решение этой задачи мы ищем в виде суммы ряда частных решений вида (11) и (13), удовлетворяющих граничным условиям (15):

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k = \| 0, \mathbf{E}_n \| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mathbf{M}_k t} \begin{Vmatrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{Vmatrix} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\mathbf{i}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{i}_k = \frac{1}{2} e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t} \mathbf{b}_0 + \| \mathbf{E}_n, 0 \| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mathbf{M}_k t} \begin{Vmatrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{Vmatrix} \cos \frac{k\pi x}{l}. \tag{17}$$

Затем требуем удовлетворения начальным условиям (16):

$$\mathbf{f}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathbf{f}_2(x) = \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b}_k \cos \frac{k\pi x}{l}. \tag{18}$$

В предположении достаточно гладких матричных функций $\mathbf{f}_1(x)$ и $\mathbf{f}_2(x)$ ряды Фурье (18) с матричными коэффициентами $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$ сходятся, и мы имеем:

$$\mathbf{a}_k = \frac{2}{l} \int_0^l \mathbf{f}_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad \mathbf{b}_k = \frac{2}{l} \int_0^l \mathbf{f}_2(x) \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{19}$$

Подстановка найденных $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$ в формулы (17) дает решение задачи.

§ 5. Задача 2 (главная). Найти решение системы (1) для значений аргументов (4) при граничных условиях (2) и начальных условиях (5).

Подобно рассмотренному в моей предыдущей заметке ([1]), решение мы ищем в виде сумм

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_1(x, t) + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{i}_1(x, t) + \mathbf{g}(x), \tag{20}$$

причем $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{g}(x)$ определяем так, чтобы они удовлетворяли системе (1) и граничным условиям

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{f}(l) = 0. \tag{21}$$

Тогда мы получаем, принимая во внимание положительность характеристических чисел матрицы $\mathbf{RG}$, такие выражения:

$$\mathbf{f}(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{g}(x) = \mathbf{G}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\sqrt{\mathbf{RG}}\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0, \tag{22}$$

причем матрица $\mathbf{RG}$ приводима к диагональному виду. Матричные же функции $\mathbf{u}_1(x, t)$ и $\mathbf{i}_1(x, t)$ должны быть решением задачи 1 при таком частном виде матричных функций начальных условий (16): $\mathbf{f}_1(x) = -\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{f}_2(x) = -\mathbf{g}(x)$.

Подстановкой выражений (22) в формулы (19) и интегрированием полученных матричных выражений посредством приведения их к диагональному виду мы получаем следующие выражения для матричных коэффициентов Фурье:

$$\mathbf{a}_k = -\frac{2}{l}\,\frac{k\pi}{l}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{b}_k = -\frac{2}{l}\,\mathbf{G}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{b}_k\\ \mathbf{a}_k\end{matrix}\right\| = -\frac{2}{l}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0\\ \frac{k\pi}{l}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0\end{matrix}\right\| =$$

$$= -\frac{2}{l}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{23}$$

Наконец, подставив выражения (23) в формулы (17) и принимая во внимание (20) и (22), мы получаем решение задачи 2:

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0 -$$

$$-\frac{2}{l}\,\|0, \mathbf{E}_n\|\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\,e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0, \tag{24}$$

$$\mathbf{i}(x, t) = \mathbf{G}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\sqrt{\mathbf{RG}}\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0 - \frac{1}{l}\,e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_0 -$$

$$-\frac{2}{l}\,\|\mathbf{E}_n, 0\|\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\,e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{25}$$

Из вышеуказанной теоремы единственности следует, что отдельный член ряда (24) равен сумме соответствующих $2n$ членов раньше полученного решения той же задачи (выражаемого для случая $n = 2$ формулой (16) заметки ([1])).

Латвийский государственный университет
Рига

Поступило
18 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Бразма, ДАН, 69, № 3 (1949). [2] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3, ч. 2, 1949, стр. 339.