Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ЛАКУНАРНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 XI 1950)

1. Обозначим через $Л$ класс непрерывных периодических (с периодом 2π) функций $f(x)$, ряды Фурье которых являются лакунарными, т. е. имеют вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(n_k x - \alpha_k), \tag{1}$$

где

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots, \ \rho_k \geqslant 0, \quad n_{k+1} / n_k = q_k \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Хорошо известно, что для любой функции $f \in Л$ ее ряд Фурье (1) абсолютно сходится. Положим

$$s_n(x) = \sum_{n_k \leqslant n} \rho_k \cos(n_k x - \alpha_k), \quad r_n(x) = \sum_{n_k > n} \rho_k \cos(n_k x - \alpha_k),$$

$$R_n(f) = \max_x |f(x) - s_n(x)|, \quad A_n = A_n(f) = \sum_{n_k > n} \rho_k;$$

через $E_n(f)$ обозначим наилучшее приближение функции f посредством тригонометрических полиномов порядка n.

С. Н. Бернштейн ([1]) (см. также ([2]), стр. 31—36) доказал, что если $\in Л$ и $q_k = 2p_k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где p_k — натуральные числа, то $E_n(f) = R_n(f)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. В настоящей работе доказывается, что для любой функции $f \in Л$

$$E_n(f) \sim R_n(f) \sim A_n(f)^*.$$

2. Напомним несколько известных результатов и получим некоторые следствия из них.

Теорема Сидона (([3]), ([4]), § 6.4). *Пусть $f \in Л$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \leqslant C_3(\lambda) \max_x |f(x)|. \tag{3}$$

Строго говоря, Сидон утверждает лишь, что ряд $\Sigma \rho_k$ сходится, однако рассмотрение его доказательства показывает, что на самом деле им установлено в точности неравенство (3).

* Как обычно, я употребляю знак $\sim$ в качестве знака порядкового равенства. Соотношение $A_n \sim B_n$ обозначает, что существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что для всех n $C_1 B_n \leqslant A_n \leqslant C_2 B_n$. Встречающийся ниже знак $\approx$ употребляется для записи асимптотического равенства.

Пусть $f \in Л$. Применяя теорему Сидона к функции $r_n(x)$, получаем, что

$$A_n(f) \leqslant C_3(\lambda) R_n(f), \tag{4}$$

откуда, в связи с очевидным неравенством $R_n(f) \leqslant A_n(f)$, сразу вытекает соотношение $R_n(f) \sim A_n(f)$.

Суммы Валле-Пуссена ([5, 6]; см. также [7–9]). Согласно Валле-Пуссену ([6], стр. 33—35), для любой непрерывной периодической функции φ имеем

$$|\varphi(x) - \sigma_{n,m}(x, \varphi)| \leqslant 2 \frac{n+m+1}{m+1} E_n(\varphi), \tag{5}$$

где $\sigma_{n,m}(x, \varphi) = \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^{m} s_{n+p}(x, \varphi) \quad (n, m, = 0, 1, 2, \ldots)$.

Пусть $f \in Л$. Воспользуемся неравенством (5), положив в нем $n = n_k$ и $m = n_{k+1} - n_k - 1$. Тогда

$$s_{n_k+p}(x, f) = s_{n_k}(x, f) \quad (p = 0, 1, \ldots, m), \qquad \sigma_{n_k, m}(x, f) = s_{n_k}(x, f),$$

$$\frac{n+m+1}{m+1} = 1 + \frac{n}{m+1} = 1 + \frac{1}{q_k - 1} \leqslant 1 + \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Поэтому

$$R_{n_k}(f) \leqslant 2 \frac{\lambda}{\lambda - 1} E_{n_k}(f) = C_4(\lambda) E_{n_k}(f) \quad (k = 1, 2 \ldots). \tag{6}$$

3. Теорема 1. *Пусть $f \in Л$. Тогда $E_n(f) \sim R_n(f) \sim A_n(f)$; точнее,*

$$C_5(\lambda) A_n(f) \leqslant E_n(f) \leqslant R_n(f) \leqslant A_n(f) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где $C_5(\lambda) > 0$ и зависит только от λ.

Доказательство. Неравенства $E_n(f) \leqslant R_n(f) \leqslant A_n(f)$ очевидны. Остается показать, что

$$A_n(f) \leqslant C_6(\lambda) E_n(f) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Пусть сперва $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Полагая в неравенстве (4) $n = n_k$ и пользуясь оценкой (6), получаем:

$$A_{n_k}(f) \leqslant C_3(\lambda) R_{n_k}(f) \leqslant C_3(\lambda) C_4(\lambda) E_{n_k}(f) = C_7(\lambda) E_{n_k}(f). \tag{9}$$

Пусть теперь $n_{k-1} < n < n_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n_0 = -1)$. Заметим, что для этих значений n $A_n(f) = \rho_k + A_{n_k}(f)$, и рассмотрим отдельно два случая: 1) $A_{n_k} \geqslant \gamma \rho_k$ и 2) $A_{n_k} < \gamma \rho_k$, где $\gamma = C_7(\lambda) / (1 + C_7(\lambda))$.

1) $A_{n_k} \geqslant \gamma \rho_k$. Имеем

$$A_n(f) = \rho_k + A_{n_k}(f) \leqslant \frac{1}{\gamma} A_{n_k}(f) + A_{n_k}(f) = \frac{1+\gamma}{\gamma} A_{n_k}(f).$$

Далее, в силу (9) и монотонности $\{E_n\}$, $A_{n_k}(f) \leqslant C_7(\lambda) E_n(f)$, и два последних неравенства дают:

$$A_n(f) \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma} A_{n_k}(f) \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma} C_7(\lambda) E_n(f) = \{1 + 2C_7(\lambda)\} E_n(f). \tag{10}$$

2) $A_{n_k} < \gamma \rho_k$. Рассмотрим функцию

$$r_{n_{k-1}}(x) = \rho_k \cos(n_k x - \alpha_k) + Q_k(x),$$

где

$$|Q_k(x)| = \left| \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} \rho_\varkappa \cos(n_\varkappa x - \alpha_\varkappa) \right| \leqslant \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} \rho_\varkappa = A_{n_k}.$$

В силу условия 2) функция $r_{n_{k-1}}(x)$ в $2n_k$ точках $x_p = (p\pi + \alpha_k) / n_k$ $(p = 1, 2, \ldots, 2n_k)$ одного периода принимает с чередующимися знаками значения, по абсолютной величине бо́льшие, чем $(1-\gamma)\rho_k$. Так как $n < n_k$, то $2n_k \geqslant 2n+2$. Таким образом, применима теорема Валле-Пуссена ([6], стр. 96), которая дает $E_n(r_{n_{k-1}}) = E_n(f) > (1-\gamma)\rho_k$. Но при выполнении условия 2)

$$A_n(f) = \rho_k + A_{n_k} < \rho_k + \gamma\rho_k = (1+\gamma)\rho_k.$$

Отсюда

$$A_n(f) \leqslant (1+\gamma)\rho_k < \frac{1+\gamma}{1-\gamma} E_n(f) = \{1 + 2C_7(\lambda)\} E_n(f). \tag{11}$$

Неравенства (9), (10) и (11) показывают, что при всех $n \geqslant 0$

$$A_n(f) \leqslant \{1 + 2C_7(\lambda)\} E_n(f) = C_6(\lambda) E_n(f).$$

Итак, доказано неравенство (8), а вместе с ним установлена и теорема 1.

Теорема 2. *Пусть $f \in Л$ и $q_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. Тогда при $n \to \infty$*

$$E_n(f) \approx R_n(f) \approx A_n(f). \tag{12}$$

Доказательство. Для любого натурального k и любого целого p положим $x_p^{(k)} = (p\pi + \alpha_k) / n_k$. Зафиксируем числа k и p и обозначим через $x_{p+2m_1}^{(k+1)}$ точку вида $x_{p+2m}^{(k+1)}$, где m — целое, ближайшую к $x_p^{(k)}$. Очевидно, $m_1 = m_1(k, p)$ и $|x_p^{(k)} - x_{p-2m_1}^{(k+1)}| \leqslant \pi / n_{k+1}$. Далее, обозначим через $x_{p+2m_2}^{(k+2)}$ точку вида $x_{p+2m}^{(k+2)}$, ближайшую к $x_{p+2m_1}^{(k+1)}$, и т. д. Мы получаем последовательность $\{x_{p+2m_l}^{(k+l)}\}$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, m_0 = 0)$, причем числа $m_l = m_l(k, p)$ — целые и

$$|x_{p+2m_l}^{(k+l)} - x_{p+2m_{l+1}}^{(k+l+1)}| \leqslant \pi / n_{k+l+1} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Из условия $q_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ вытекает, что ряд $\Sigma\, 1/n_k$ сходится. Поэтому существует предел $\widetilde{x}_p^{(k)} = \lim\limits_{l\to\infty} x_{p+2m_l}^{(k+l)}$.

Изучим некоторые свойства чисел $\widetilde{x}_p^{(k)}$. В силу (13) имеем для $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$|x_{p+2m_l}^{(k+l)} - \widetilde{x}_p^{(k)}| \leqslant \sum_{h=l}^{\infty} |x_{p+2m_h}^{(k+h)} - x_{p+2m_{h+1}}^{(k+h+1)}| \leqslant c_{k+l} = \pi \sum_{h=k+l+1}^{\infty} \frac{1}{n_h}. \tag{14}$$

Произведем оценку констант c_k. Зададим ε $(0 < \varepsilon < 1/3)$, и пусть $1/q_k < \varepsilon$ для $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Тогда для $k \geqslant k_0$

$$c_k = \frac{\pi}{n_{k+1}}\left(1 + \frac{1}{q_{k+1}} + \frac{1}{q_{k+1}q_{k+2}} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{\pi}{n_{k+1}}(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots) = \frac{\pi}{(1-\varepsilon)n_{k+1}}. \tag{15}$$

Покажем, что для $k \geqslant k_0$

$$\widetilde{x}_{p+1}^{(k)} > \widetilde{x}_p^{(k)}, \quad \widetilde{x}_{2n_k}^{(k)} - \widetilde{x}_1^{(k)} < 2\pi. \tag{16}$$

В самом деле, согласно (14) и (15),

$$|\widetilde{x}_p^{(k)} - x_p^{(k)}| \leqslant c_k \leqslant \frac{\pi}{(1-\varepsilon)n_{k+1}} = \frac{\pi}{(1-\varepsilon)n_k q_k} < \frac{\varepsilon\pi}{(1-\varepsilon)n_k}.$$

Отсюда

$$\tilde{x}_{p+1}^{(k)} - \tilde{x}_p^{(k)} = x_{p+1}^{(k)} - x_p^{(k)} + (\tilde{x}_{p+1}^{(k)} - x_{p+1}^{(k)}) - (\tilde{x}_p^{(k)} - x_p^{(k)}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi}{n_k} - \frac{2\varepsilon\pi}{(1-\varepsilon)\, n_k} = \frac{\pi}{n_k}\left(1 - \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) > 0,$$

так как $\varepsilon < 1/_3$. Аналогично доказывается и второе неравенство (16).

Рассмотрим теперь функцию $r_{n_{k-1}}(x)$ при $k \geqslant k_0$. Пользуясь неравенствами (14) и (15), получаем

$$\cos\{n_{k+l}(\tilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)})\} \geqslant 1 - n_{k+l} \mid \tilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)} \mid \geqslant$$

$$\geqslant 1 - n_{k+l} c_{k+l} \geqslant 1 - \frac{\pi n_{n+l}}{(1-\varepsilon)\, n_{k+l+1}} = 1 - \frac{\pi}{(1-\varepsilon)\, q_{k+l}} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon\pi}{1-\varepsilon},$$

$$(-1)^p r_{n_{k-1}}(\tilde{x}_p^{(k)}) = (-1)^p \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{k+l} \cos(n_{k+l}\tilde{x}_p^{(k)} - \alpha_{k+l}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{k+l} \cos\{n_{k+l}(\tilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)})\} \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon\pi}{1-\varepsilon}\right) A_{n_{k-1}}. \tag{17}$$

Таким образом, в силу (16) и (17), функция $r_{n_{k-1}}(x)$ принимает в $2n_k$ точках $\tilde{x}_p^{(k)}$ $(p = 1, 2, \ldots, 2n_k)$ одного периода с чередующимися знаками значения, по абсолютной величине не меньшие, чем $\left(1 - \frac{\varepsilon\pi}{1-\varepsilon}\right) A_{n_{k-1}}$. Применяя теорему Валле-Пуссена, получаем отсюда, что для $n_{k-1} \leqslant n < n_k$

$$E_n(r_{n_{k-1}}) = E_n(f) \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon\pi}{1-\varepsilon}\right) A_{n_{k-1}} = \left(1 - \frac{\varepsilon\pi}{1-\varepsilon}\right) A_n.$$

Из этого неравенства вытекает, что при $n \to \infty$

$$E_n(f) \geqslant \{1 - o(1)\}\, A_n(f).$$

Кроме того, имеем очевидные неравенства $E_n(f) \leqslant R_n(f) \leqslant A_n(f)$. Сопоставляя эти оценки, приходим к соотношениям (12), и теорема 2 доказана.

4. Любопытно отметить, что для функций $f \in Л$ порядок наилучших приближений E_n вполне определяется заданием чисел ρ_k и совершенно не зависит от „фаз“ α_k.

Заметим в заключение, что теоремы 1 и 2 позволяют эффективно строить функции, обладающие заданным характером поведения наилучших приближений. Например, если $\varphi(\delta) \in N^\alpha$ (см. определение 3 моей работы ([10])), то для функции

$$f(x) = \sum \{\varphi(2^{-k}) - \varphi(2^{-k-1})\} \cos(2^k x - \alpha_k)$$

при произвольных α_k имеем $E_n(f) \sim \varphi(n^{-1})$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Тр. Ленинградск. индустриальн. ин-та, 10, сер. физ.-мат. наук, в. 3, 3 (1936). [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов..., М., 1937. [3] S. Sidon, Math. Ann., 97, 675 (1927). [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., 1939. [5] C. de la Vallée Poussin, C. R., 166, 799 (1918). [6] C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions..., Paris, 1919. [7] Л. Вербицкий, Научн. зап. Днепропетр. гос. ун-та, 21, 113 (1940). [8] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 509 (1940). [9] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М., 1949. [10] С. Б. Стечкин, ДАН, 65, № 2 (1949).