Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. СМИРНОВ

ГРУППЫ БЕТТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 XI 1950)

Известно и легко проверяется, что теоремы двойственности Л. С. Понтрягина для любых компактов евклидова n-мерного пространства E^n или сферического n-мерного пространства S^n и П. С. Александрова [1] для любых множеств в S^n являются простыми следствиями двух теорем, а именно:

Теорема 1. *Пусть в произвольном топологическом пространстве R дана направленная* по включению система бикомпактов Φ_λ; группы Бетти $\Delta^p\Phi_\lambda$** вместе с гомоморфизмами вложения E^μ_λ образуют обратный спектр, предельная группа которого есть группа $\Delta^p\Phi$ пересечения Φ бикомпактов Φ_λ.*

Теорема 2. *Пусть в наследственно нормальном пространстве R дано множество M; группы Бетти $\delta^p U_\lambda$*** окрестностей U_λ множества M вместе с гомоморфизмами вложения E^μ_λ образуют обратный спектр, предельная группа**** которого есть группа $\delta^p M$.*

Целью настоящей заметки является доказательство этих теорем.

Пусть $M \subseteq R$; система открытых в M множеств, сумма которых равна M, называется **покрытием** множества M; система открытых в R множеств, сумма которых содержит M, называется **внешним покрытием** множества M. Покрытие $\omega = \{o_\theta\}$ множества M называется **хорошим**, если существует внешнее покрытие $\Omega = \{O_\theta\}$ множества M подобное покрытию ω и такое, что $M \cap O_\theta = o_\theta$. Множество M называется **хорошо расположенным** в R **относительно некоторой системы** Σ **своих покрытий**, если в любое покрытие $\omega \in \Sigma$ можно вписать хорошее покрытие $\omega' \in \Sigma$.

Теоремы 1 и 2 вытекают из совокупности следующих трех утверждений.

Основная теорема 3. *Пусть в топологическом пространстве R дана направленная по включению система множеств M*

---

* Направленным множеством называют всякое частично упорядоченное множество Θ, в котором для любых $\lambda \in \Theta$ и $\mu \in \Theta$ существует $\nu \in \Theta$ такое, что $\nu > \lambda$, $\nu > \mu$.

** Группы Δ^p основываются на конечных покрытиях; их можно брать как по бикомпактной, так и по дискретной области коэффициентов.

*** Группы δ^p основываются на счетных локально конечных покрытиях (каждый элемент пересекается с конечным числом элементов того же покрытия) и на рассмотрении лишь конечных цепей (конечные циклы и конечные гомологии); группы δ^p всегда берутся по дискретной области коэффициентов.

**** На эту группу впервые обратил внимание Г. Чогошвили ([2], п. 4:6), однако ее изоморфизм с группой $\delta^p M$ не был им усмотрен.

такая, что в любой окрестности U пересечения M всех множеств M_λ содержится некоторое M_λ. Если все M_λ и M хорошо расположены в R относительно систем своих конечных, соответственно счетных, локально конечных покрытий**, то группа $\Delta^p M$, соответственно $\delta^p M$, есть предельная группа обратного спектра групп $\Delta^p M_\lambda$, соответственно $\delta^p M_\lambda$, с гомоморфизмами вложения E^μ_λ.*

Теорема 4. *Любое замкнутое множество F нормального пространства R хорошо расположено в R относительно системы своих конечных и относительно системы своих счетных локально конечных покрытий.*

Теорема 4′. *Любое множество M наследственно нормального пространства R хорошо расположено в нем относительно системы своих конечных и относительно системы своих счетных локально конечных покрытий***.*

Для доказательства теоремы 1 возьмем за пространство R какой-нибудь бикомпакт Φ_{λ_0} из нашей системы. Очевидно, предельная группа спектра S всех $\Delta^p\Phi_\lambda$ изоморфна предельной группе конфинальной части S' спектра S, состоящей из всех $\Delta^p\Phi_\lambda$, где $\Phi_\lambda \subseteq \Phi_{\lambda_0}$. Так как, далее, для любой окрестности U бикомпакта $\Phi = \bigcap\limits_\lambda \Phi_\lambda$ найдется некоторое $\Phi_\lambda \subseteq U$, то, в силу теорем 4 и 3, предельная группа спектра S', а значит, и спектра S есть группа $\Delta^p\Phi$, чем теорема 1 доказана.

Теорема 2 непосредственно вытекает из теорем 3 и 4′.

Доказательства теорем 4 и 4′, имеющих чисто теоретико-множественный характер, мы здесь давать не будем (доказательство теоремы 4 не представляет затруднений).

Переходим к доказательству теоремы 3. Оно распадается на три части.

1. Пусть $M \subseteq R$. Аналогично обычной группе Бетти $\Delta^p M$, соответственно $\delta^p M$, построим, основываясь на внешних покрытиях множества M, группы $\Delta^p MR$, соответственно $\delta^p MR$, которые назовем внешними.

Теорема 5. *Для любого множества M, хорошо расположенного в R относительно системы конечных, соответственно счетных, локально конечных покрытий, внешняя группа $\Delta^p MR$, соответственно $\delta^p MR$, изоморфна группе $\Delta^p M$, соответственно $\delta^p M$****.*

Для доказательства назовем внешнее покрытие $\Omega = \{O_\theta\}$ множества M хорошим, если оно подобно покрытию $\omega = \{M \cap O_\theta\}$. Если хорошие покрытия образуют конфинальную часть той или иной интересующей нас системы покрытий (см. определение хорошей расположенности), то и хорошие внешние покрытия образуют конфинальную часть соответствующей системы внешних покрытий. Поэтому в случае хорошо расположенных множеств для построения как обычных, так и внешних групп Бетти достаточно пользоваться одними лишь хорошими покрытиями, соответственно хорошими внешними покрытиями.

Имея это в виду, нетрудно показать, что внешний спектр, например, спектр $\{\Delta^p\,\Omega_{\alpha\sigma}, \widetilde{\omega}^{\beta\tau}_{\alpha\sigma}\}$ (где $\Omega_{\alpha\sigma}$ суть всевозможные внешние по-

* Значит, если все множества M_λ не пусты, то и M не пусто.

** Из хорошей расположенности множеств M_λ не вытекает хорошая расположенность их пересечения M, так как окрестности любого плохо расположенного множества M сами расположены хорошо.

*** В случае, когда пространство R является локально бикомпактным, утверждение теоремы 4′ доказано Г. Чогошвили ([2], лемма 52 : 1′).

**** Г. Чогошвили ([2]) определяет внешнюю группу множества M как предельную группу спектра групп Бетти окрестностей множества M. Для хорошо расположенных множеств, в силу теорем 2 и 5, внешние группы в смысле Г. Чогошвили и в моем смысле совпадают с обычными группами Бетти, а потому и между собой.

крытия множества M, высекающие из M покрытие ω_α), получается из спектра $\{\Delta^p \omega_\alpha, \widetilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ путем мультипликации и ослабления порядка*, т. е. операций, не меняющих предельной группы спектра $\{\Delta^p\omega_\alpha, \widetilde{\omega}_\alpha^\beta\}$. Этим теорема 5 доказана.

Замечание. Доказанный нами изоморфизм E_{MR}^M группы $\Delta^p M$, соответственно $\delta^p M$, на $\Delta^p MR$, соответственно $\delta^p MR$, может быть получен обычным путем с помощью проекций $\widetilde{\omega}_{\beta'}^\beta$ нерва покрытия ω_β в нерв внешнего покрытия $\Omega_{\beta'}$, когда ω_β вписано в $\Omega_{\beta'}$.

2. Пусть теперь $M \subseteq K \subseteq R$. Внешние покрытия множества M образуют направленное множество Θ, а внешние покрытия множества K образуют подмножество Θ' множества Θ, являющееся направленным в силу того же порядка, что и в Θ.

Если дан какой-нибудь обратный внешний спектр S множества M, например $\{\Delta^p \Omega_{\alpha'}; \widetilde{\omega}_{\alpha'}^{\beta'}\}$, то группы $\Delta^p \Omega_{\alpha'}$, для которых $\alpha' \in \Theta'$, образуют внешний спектр S' множества K. Введем гомоморфизм вложения E_{KR}^{MR} внешней группы $\Delta^p MR = \lim S$ во внешнюю группу $\Delta^p KR = \lim S'$, ставящий в соответствие каждой нити $\xi = \{\xi_{\alpha'}\} \in \Delta^p MR$ нить $\xi' \in \Delta^p KR$, состоящую из тех $\xi_{\alpha'} \in \xi$, для которых $\alpha' \in \Theta'$. Этот же гомоморфизм сразу получается и обычным путем с помощью проекций $\widetilde{\omega}_{\alpha'}^{\beta'}$. Имея в виду равенства $\widetilde{\omega}_{\alpha'}^{\beta'} \widetilde{\omega}_{\beta'}^{\beta} = \widetilde{\omega}_{\alpha'}^{\alpha} \widetilde{\omega}_\alpha^\beta$ (здесь ω_β — покрытие M, вписанное во внешнее покрытие $\Omega_{\beta'}$ и в покрытие ω_α множества K; эти последние вписаны в $\Omega_{\alpha'}$ — внешнее покрытие K), получаем предложение:

Теорема 5'. *Если множества K и $M \subseteq K$ хорошо расположены в R относительно системы конечных, соответственно счетных, локально конечных покрытий, то $E_{KR}^{MR} E_{MR}^M = E_{KR}^K E_K^M$.*

Т. е. гомоморфизмы вложения E_{KR}^{MR} и E_K^M совпадают, если считать совпадающими соответствующие внешние и обычные группы Бетти множеств M и K.

3. В силу сказанного в пунктах 1 и 2 основная теорема 3 сразу вытекает из следующего предложения.

Теорема 3*. *Пусть в пространстве R дана направленная по включению система множеств M_λ такая, что в любой окрестности U пересечения M всех множеств M_λ содержится некоторое M_λ; тогда внешняя группа $\Delta^p MR$, соответственно $\delta^p MR$, есть предельная группа обратного спектра внешних групп $\Delta^p M_\lambda R$, соответственно $\delta^p M_\lambda R$, с гомоморфизмами вложения E_λ^μ.*

Доказательство теоремы 3*. Пусть Θ — система всех внешних покрытий множества M, а Θ^λ — система всех внешних покрытий множества M_λ. Тогда $\Theta^\lambda \subseteq \Theta$ и $\bigcup\limits_\lambda \Theta^\lambda = \Theta$. Система множеств Θ^λ направлена по включению: $\Theta^\mu > \Theta^\lambda$, если $\Theta^\mu \supseteq \Theta^\lambda$, т. е., если $M_\mu \subseteq M_\lambda$. Так как для $\Theta^\nu > \Theta^\mu > \Theta^\lambda$ имеем $E_\lambda^\nu = E_\lambda^\mu E_\mu^\nu$, то предельные группы внешних спектров множеств M_λ, например спектров $\{\Delta^p\Omega_\alpha, \widetilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \Theta^\lambda$, вместе с гомоморфизмами E_λ^μ сами образуют обратный спектр $\{\Delta^p M_\lambda R, E_\lambda^\mu\}$. Пусть $\eta = \{\xi^\lambda\}$ — произвольный элемент (нить) предельной группы G последнего спектра. Все элементы $\xi_\alpha \in \Delta^p \Omega_\alpha$, принадлежащие каждому ξ^λ из $\Delta^p M_\lambda R$, в свою очередь принадлежащему η,

---

* Спектр $\{X_{\alpha\sigma}, \widetilde{\omega}_{\alpha\sigma}^{\beta\tau}\}$ называется мультипликацией спектра $\{X_\alpha, \widetilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, если считать всегда $\beta\tau > \alpha\sigma$ как только $\beta > \alpha$, причем все $X_{\alpha\sigma}$ изоморфны группе X_α и при этих изоморфизмах $\widetilde{\omega}_{\alpha\sigma}^\alpha$ гомоморфизмы $\widetilde{\omega}_{\alpha\sigma}^{\beta\tau}$ и $\widetilde{\omega}_\alpha^\beta$ связаны между собой равенствами $\widetilde{\omega}_{\alpha\sigma}^{\beta\tau} \widetilde{\omega}_{\beta\tau}^{\beta} = \widetilde{\omega}_{\alpha\sigma}^{\alpha} \widetilde{\omega}_\alpha^\beta$.

Мы говорим, что направленное множество Θ' получилось из направленного множества Θ ослаблением порядка, если Θ и Θ' состоят из одних и тех же элементов и из $\beta > \alpha$ в Θ' следует, что $\beta > \alpha$ в Θ.

образуют нить ξ группы $\Delta^p MR$. Обратно: для каждого $\xi \in \Delta^p MR$ элементы $\xi^\lambda = E_\lambda \xi$ групп $\Delta^p M_\lambda R$ образуют нить η группы G. Значит, группы G и $\Delta^p MR$ изоморфны.

Легко видеть, что в случае бикомпактности групп Δ^p все рассматриваемые гомоморфизмы будут непрерывными, а изоморфизмы — взаимно-непрерывными.

Итак, теорема 3*, а вместе с ней и теоремы 3, 2, 1 доказаны.

В метрическом случае теорему 4 можно усилить:

Теорема 4''. *Любое множество M метрического пространства R хорошо расположено в нем относительно системы всех своих локально конечных покрытий.*

Легко проверить, что все результаты пунктов 1, 2, 3 справедливы и для групп δ^p, основанных на любых локально конечных покрытиях. Значит, *для этих групп δ^p остаются верными и утверждения основной теоремы* 3, *а также и теоремы* 2 *в случае, когда объемлющее пространство R является метрическим.*

Соответствующие результаты справедливы и для ∇-групп, двойственных рассматриваемым нами Δ-группам; надо только в формулировках наших теорем заменить гомоморфизмы вложения E_λ^μ гомоморфизмами высечения J_μ^λ, в результате чего получатся прямые спектры тех или иных бикомпактных или дискретных групп. Предельные группы бикомпактных прямых спектров при этом понимаются в смысле Чогошвили (см. ([1]), § 1).

Поступило
11 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Матем. сборн., 21 (63) : 2, 161 (1947). [2] Г. С. Чогошвили, О соотношениях двойственности в топологических пространствах, Диссертация. Матем. ин-т АН СССР, 1945.