Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. А. ЛЕБЕДЕВ

МЕТОД ВАРИАЦИЙ В КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 XI 1950)

Пусть S — класс функций $f(z)=z+C_2z^2+\cdots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$; $S_l\,(l=1,2,\ldots)$ — класс функций $f_l(z)=\sqrt[l]{f(z^l)}=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} C^l_{l\nu+1}z^{l\nu+1}$, где $f(z)\in S$; $S\left(|C^0_{n_1}|,|C^0_{n_2}|,\ldots,|C^0_{n_m}|\right)$ — класс функций $f(z)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}C_\nu z^\nu\in S$, имеющих коэффициенты $C_{n_1},C_{n_2},\ldots,C_{n_m}$, по модулю соответственно равные числам $|C^0_{n_1}|,|C^0_{n_2}|,\ldots,|C^0_{n_m}|$ $(m\geqslant 1,\ n_1,\ldots,n_m\geqslant 2)$; S' — класс функций $w=f(z)\in S$, отображающих круг $|z|<1$ на всю плоскость w с конечным числом разрезов по аналитическим кривым. Соответственно определяются классы $S'_l\,(l=1,2,\ldots)$ и $S'\left(|C_{n_1}|,\ldots,|C_{n_m}|\right)$.

Символ $\{\varphi(\xi)\}_n$ употребляется для обозначения коэффициента при z^n в разложении регулярной функции $\varphi(z)$ в ряд Маклорена.

В доказательствах используется вариационный метод, разработанный Г. М. Голузиным ([1]), и параметрическое представление функций $f_l(z)\in S'_l$, которое дает следующая лемма.

Лемма. *Для каждой функции $f_l(z)\in S'_l\,(l=1,2,\ldots)$ можно поставить в соответствие комплексную функцию $k(t)=e^{i\theta(t)}$ $(|k(t)|=1)$, непрерывную в $0\leqslant t<\infty$ за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, такую, что функция $f_l(z)$ может быть представлена в виде $f_l(z)=\lim\limits_{t\to\infty}e^t f_l(z,t)$, где функция $f_l(z,t)$ является в $0\leqslant t<\infty$ решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial f_l}{\partial t}=-f_l\frac{1+k(t)^l f_l^l}{1-k(t)^l f_l^l}\tag{1}$$

удовлетворяющим начальному условию $f_l|_{t=0}=z$. Кроме того, $|f_l(z,t)|<1$ в круге $|z|<1$ при любом t, $0\leqslant t<\infty$ (([2]), стр. 38—42).

В дальнейшем полагаем, что для каждой функции $f(z)\in S'_l$ построены согласно лемме функции $f(z,t)$ и $k(t)$.

Методом вариаций доказывается теорема 1.

Теорема 1. *Среди функций класса S_l максимум для $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\gamma_\nu C^l_{l\nu+1}\right|$ при некотором заданном $n\geqslant 2$ и заданных комплексных*

γ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$, $\gamma_{n-1} \neq 0$ *достигается для некоторой функции* $f_l(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{l\nu+1}^{l} z^{l\nu+1} \in S_l'$, *удовлетворяющей при любом* $t, 0 \leqslant t < \infty$, *следующим соотношениям:*

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\sum_{\nu=0}^{n-1}\gamma_\nu\left\{f_l(\xi) - f_l'(\xi)\,\frac{f_l(\xi, t)}{f_l'(\xi, t)}\,\frac{1 + k(t)^l f_l(\xi, t)^l}{1 - k(t)^l f_l(\xi, t)^l}\right\}_{l\nu+1}\right) = 0\,*, \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\sum_{\nu=0}^{n-1}\gamma_\nu\left\{f_l(\xi) - f_l'(\xi)\,\frac{f_l(\xi, t)}{f_l'(\xi, t)}\,\frac{1 + k_*^l f_l(\xi, t)^l}{1 - k_*^l f_l(\xi, t)^l}\right\}_{l\nu+1}\right) \leqslant 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{i\alpha}\sum_{\nu=0}^{n-1}\gamma_\nu\left\{f_l'(\xi)\,\frac{f_l(\xi, t)}{f_l'(\xi, t)}\right\}_{l\nu+1}\right) = 0 \quad ((^2),\ \text{стр. } 49), \tag{4}$$

где α — *некоторое вещественное число и* k_* — *любое комплексное число такое, что* $|k_*| \leqslant 1$. *Кроме того, функция* $f_l(z)$ *удовлетворяет при любом* t, $0 \leqslant t < \infty$, *дифференциальному уравнению*

$$\left(\frac{z f_l'(z)}{f_l(z)}\right)^2\left(\frac{f_l(z, t)}{z f_l'(z, t)}\right)^2\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{i\alpha}\gamma_\nu\left\{\frac{f_l(\xi)^{l+1}}{f_l(z)^l - f_l(\xi)^l}\right\}_{l\nu+1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(e^{i\alpha}\gamma_\nu\left\{\frac{f_l'(\xi)\, f_l(\xi, t)\, f_l(z, t)^l}{f_l'(\xi, t)\,(f_l(z, t)^l - f_l(\xi, t)^l)}\right\}_{l\nu+1} - e^{i\alpha}\gamma_\nu\{f_l(\xi)\}_{l\nu+1} +\right.$$

$$\left. + e^{-i\alpha}\overline{\gamma}_\nu\overline{\left\{\frac{f_l'(\xi)\, f_l(\xi, t)^{l+1}\, \overline{f_l(z, t)^l}}{f_l'(\xi, t)\,(1 - \overline{f_l(z, t)^l}\, f_l(\xi, t)^l)}\right\}_{l\nu+1}}\right). \tag{5}$$

Функция $\theta(t)$ *имеет конечные производные всех порядков при всех* $t, 0 \leqslant t < \infty$, *за исключением, быть может, конечного числа точек* $t = t_r$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ *и удовлетворяет дифференциальному уравнению вида*

$$\Phi(\theta', \theta'', \ldots, \theta^{(2n-3)}) = 0, \tag{6}$$

где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-3})$ *есть некоторая рациональная функция своих аргументов с постоянными коэффициентами.*

Уравнение (5) при $t = 0$ и $l = 1$ обращается в уравнение, впервые полученное Г. М. Голузиным ((²), стр. 49).

Теорема 2. *Если класс* $S(|C_{n_1}|, \ldots, |C_{n_m}|)$ *не пустой, то среди функций этого класса максимум для* $|C_{n_0}|$ *с фиксированным* $n_0 \geqslant 2$, *отличным от* $n_1, n_2, \ldots, n_m$, *достигается для некоторой функции* $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu z^\nu \in S'(|C_{n_1}|, \ldots, |C_{n_m}|)$, *удовлетворяющей при любом* t, $0 \leqslant t < \infty$, *следующим равенствам:*

$$\sum_{\nu=0}^{m}\lambda_\nu \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi_\nu}\left\{f(\xi) - f'(\xi)\,\frac{f(\xi, t)}{f'(\xi, t)}\,\frac{1 + k(t)}{1 - k(t)}\,\frac{f(\xi, t)}{f(\xi, t)}\right\}_{n_\nu}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{\nu=0}^{m}\lambda_\nu \operatorname{Im}\left(e^{-i\varphi_\nu}\left\{f'(\xi)\,\frac{f(\xi, t)}{f'(\xi, t)}\right\}_{n_\nu}\right) = 0, \tag{8}$$

* Здесь и в дальнейшем под $f_l'(\xi, t)$ понимается производная от $f_l(\xi, t)$ по ξ.

где λ_ν — постоянные вещественные числа, одновременно не равные нулю, и $\varphi_\nu = \arg C_{n_\nu}$. В случае, если $\lambda_0 > 0$, то при любом комплексном числе k_* таком, что $|k_*| \leqslant 1$, и при любом t, $0 \leqslant t < \infty$, имеет место неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi_\nu} \left\{ f(\xi) - f'(\xi) \frac{f(\xi, t)}{f'(\xi, t)} \frac{1 + k_* f(\xi, t)}{1 - k_* f(\xi, t)} \right\}_{n_\nu} \right) \leqslant 0. \tag{9}$$

Кроме того, функция $f(z)$ удовлетворяет в круге $|z| < 1$ при любом t, $0 \leqslant t < \infty$, дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 \left(\frac{f(z, t)}{zf'(z, t)}\right)^2 \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu e^{-i\varphi_\nu} \left\{ \frac{f(\xi)^2}{f(z)\,-\,f(\xi)} \right\}_{n_\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu e^{-i\varphi_\nu} \left\{ \frac{f(\xi, t)\, f'(\xi)\, f(z, t)}{f(\xi, t)\, f'(\xi, t)\, (f(z, t) - f(\xi, t))} - f(\xi) \right\}_{n_\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu e^{i\varphi_\nu} \left\{ \overline{\frac{f(\xi, t)^2\, f'(\xi)\, \overline{f(z, t)}}{f'(\xi, t)\, (1 - \overline{f(z, t)}\, f(\xi, t))}} \right\}_{n_\nu}. \tag{10}$$

При этом правая часть уравнения при z таких, что $|f(z, t)| = 1$, неотрицательна, если $\lambda_0 > 0$.

Уравнение (10) при $t = 0$ обращается в уравнение, впервые полученное Г. М. Голузиным ([3]).

Поступило
27 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **19** (61), 2, 203 (1946). [2] Г. М. Голузин, Усп. матем. наук, **6** (1939). [3] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 21 (63), 1, 129 (1947).