Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 XI 1950)

1. Пусть $q(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l,\ l < \infty)$ — некоторая вещественная функция, суммируемая в интервале определения $(0, l)$, а $L_q = -d^2/dx^2 + q(x)$ — соответствующий ей дифференциальный оператор.

Через $S_q(\alpha, \beta)$ $(-\infty < \alpha, \beta < \infty)$ мы будем обозначать спектр краевой задачи

$$L_q y = \lambda y; \quad \cos\alpha\, y(0) + \sin\alpha\, y'(0) = 0, \quad \cos\beta\, y(l) + \sin\beta\, y'(l) = 0, \tag{1}$$

расположенный в виде возрастающей последовательности.

Как известно, число l вполне определяется заданием какого-либо спектра $S_q(\alpha, \beta) = \{\lambda_j\}_1^\infty$, так как

$$l^2 = \pi^2 \lim_{n\to\infty} (n^2/\lambda_n). \tag{2}$$

Г. Борг [1] доказал, что если для двух функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ и некоторых чисел α_1, α_2 и β $(\operatorname{tg}\alpha_1 \neq \operatorname{tg}\alpha_2)$: $S_{q_1}(\alpha_i, \beta) = S_{q_2}(\alpha_i, \beta)$ $(i = 1, 2)$, то почти всюду $q_1(x) = q_2(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$*.

Пользуясь иными методами, В. А. Марченко [3] получил недавно более полный результат, а именно, он показал, что функция $q(x)$, равно как и числа $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$ и $\operatorname{tg}\beta$ $(\operatorname{tg}\alpha_1 \neq \operatorname{tg}\alpha_2)$ однозначно определяются соответствующими им спектрами $S_q(\alpha_i, \beta)$ $(i = 1, 2)$. Кроме того, несколько изменив постановку вопроса, В. А. Марченко обобщил эту теорему единственности на сингулярный случай, когда l не обязательно конечно, а функция $q(x)$ $(0 \leqslant x < l)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, возможно, только в подинтегралах $(0, a)$, где $a < l$, но не в полном интервале $(0, l)$.

Назовем l-последовательностью всякую последовательность $\{\lambda_n\}$, для которой выполняется условие (2) с данным $l > 0$.

Как известно, числа двух различных спектров $S_q(\alpha_i, \beta)$ $(i = 1, 2)$ строго перемежаются.

В упомянутых важных исследованиях Г. Борга и В. А. Марченко осталась нерешенной следующая основная задача.

Задача А. Заданы две перемежающиеся l-последовательности чисел $S = \{\lambda_n\}$ и $S' = \{\lambda'_n\}$:

$$\lambda_1 < \lambda'_1 < \lambda_2 < \lambda'_2 < \ldots \tag{3}$$

---

* Борг предполагал, что одно из чисел α или α' равно нулю, но от этого ограничения легко избавиться [2].

Требуется узнать, существуют ли функция $q(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ и числа α, α' и β такие, что $S_q(\alpha, \beta) = S$, а $S_q(\alpha', \beta) = S'$, и если существуют, то найти их.

Ниже приводится цепь аналитических операций, дающих решение этой задачи.

В основе найденного решения лежит следующая идея.

1. Подобно тому, как всякой якобиевой матрице J соответствует некоторая степенная проблема моментов, по любому решению которой (функции распределения масс) вполне определяется сама матрица J, дифференциальному оператору второго порядка L с граничным условием на одном конце соответствует некоторая „обобщенная“ проблема моментов, по любой функции распределения которой вполне определяется, вместе с граничным условием, сам оператор (если его задавать в той или иной „канонической“ форме). Для операторов „достаточно регулярного типа“ этой обобщенной проблемой моментов является разработанная автором проблема продолжения эрмитово-положительных функций ([4–7]).

Здесь эта идея иллюстрируется на решении задачи А.

Теорему единственности Борга — Марченко мы получим попутно.

2. Обозначим через P_a $(0 < a \leqslant \infty)$ совокупность непрерывных вещественных четных функций $F(t)$ $(|t| < a)$, которым соответствует положительно определенное ядро $F(s-t)$ $(0 \leqslant s,\ t < a)$.

Центральной массой M функции $F(t) \in P_a$ назовем наибольшее из чисел ρ, для которых $F(t) - \rho \in P_a$. Существует много способов вычисления M. В наиболее трудном случае, когда $a < \infty$, M может быть, например, получено по формуле

$$M^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \left(\int_0^a \chi_j(s)\, ds \right)^2,$$

где $\chi_j(s)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — полная ортонормированная система фундаментальных функций интегрального уравнения

$$\chi(s) = \mu \int_0^a F(s-t)\, \chi(t)\, dt,$$

а $\{\mu_j\}_1^\infty$ — соответствующая ей последовательность характеристических чисел ([4]).

Если $F(t) \in P_a$, то, рассматривая F в укороченном интервале $(-x, x)$, будем, очевидно, иметь $F(t) \in P_x$ $(0 < x \leqslant a)$. Функции F, как элементу P_x $(0 < x \leqslant a)$, будет соответствовать некоторая центральная масса $M(x)$ $(0 < x \leqslant a)$. Так определенную функцию $M(x)$ $(0 < x \leqslant a)$ будем называть центральной функцией для $F(t) \in P_a$. Эта функция, оказывается, всегда полунепрерывна снизу и не возрастает с возрастанием x; кроме того, $M(x) \leqslant F(0)$ $(0 < x \leqslant a)$. Мы будем полагать $M(0)$ равным пределу $M(x)$ при $x \to +0$.

3. Очевидно, что при решении задачи A можно предполагать без ограничения общности все числа в (3) положительными.

Всяким двум бесконечно возрастающим перемежающимся последовательностям $S = \{\lambda_j\}_1^0$ и $S' = \{\lambda_j'\}_1^\infty$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_1')$ соответствует абсолютно сходящееся разложение:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda / \lambda_j'}{1 - \lambda / \lambda_j} = \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{\lambda_j - \lambda}, \tag{4}$$

где $\gamma \geqslant 0$, а $m_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Существование разложения (4) для стоящего слева произведения может быть доказано элементарными средствами, но оно также получается как непосредственное следствие общего предложения:

Для того чтобы некоторая функция $\Phi(z)$, определенная для всех $z\overline{\in}(0, \infty)$, была регулярной аналитической функцией, принимающей только неотрицательные значения для отрицательных z и отображающей верхнюю полуплоскость в свою часть, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(z)$ допускала при любом $z\overline{\in}(0, \infty)$ представление:

$$\Phi(z)=\gamma+\int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \quad \left(\int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda}<\infty\right),$$

где $\gamma \geqslant 0$, *а* $\sigma(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$ — *некоторая неубывающая функция.*

По разложению (4) образуем функцию

$$F(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_j}{\lambda_j}\cos\sqrt{\lambda_j}\,t \qquad (-\infty < t < \infty),$$

принадлежащую, очевидно, классу P_∞. Ее центральную функцию обозначим через $M(x; S, S')$ $(0 \leqslant x < \infty)$.

Решение задачи А вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $S=S_q(\alpha, \beta)=\{\lambda_j\}_1^\infty$ *и* $S'=S_q(\alpha', \beta)=\{\lambda_j'\}_1^\infty$ $(0<\lambda_1<\lambda_1'<\ldots)$ — *два спектра некоторого оператора* L_q, *а* $M(x) = M(x; S, S')$. *Тогда*

$$M(2x)-M(2l)=\mathrm{const}\left(\frac{\psi(l)}{\varphi(l)}-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *суть решения уравнения* $L_q y=0$, *выделяемые условиями*:

$$\varphi(0)=\psi'(0)=\sin\alpha, \quad \varphi'(0)=-\psi(0)=-\cos\alpha.$$

Функция $M(x)\equiv M(2l)$ *при* $x \geqslant 2l$.

Так как из (5) вытекает, что

$$\varphi(x)=\mathrm{const}\left(-\frac{dM(2x)}{dx}\right)^{-1/2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{6}$$

то мы приходим к следующему правилу восстановления оператора L_q по его двум спектрам S и S'.

Образуем функцию $M(x)=M(x; S, S')$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$; по формуле (6) находим функцию $\varphi(x)$, а по ней $q(x)=\varphi''(x)/\varphi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$.

Одновременно мы получили и правило определения граничных условий, соответствующих S и S'.

В самом деле, $\operatorname{tg}\alpha=-\varphi(0)/\varphi'(0)$. Составляя затем решение $\varphi(x; \lambda)$ уравнения $L_q y-\lambda y=0$, удовлетворяющее условиям $\varphi(0; \lambda)=\sin\alpha$, $\varphi'(0; \lambda)=-\cos\alpha$, мы найдем:

$$\operatorname{tg}\beta=-\frac{\varphi(l, \lambda_j)}{\varphi'(l, \lambda_j)} \qquad (j=1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Образуя, далее, решение $\chi(x;\lambda)$, удовлетворяющее условиям $\chi(l;\lambda)=\sin\beta$, $\chi'(l;\lambda)=-\cos\beta$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{\chi(0;\lambda_j)}{\chi'(0;\lambda_j)} \qquad (j=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Для разрешимости задачи А, таким образом, оказывается необходимым выполнение следующих условий:

1°. *Функция* $M(x)=M(x; S, S')$ $(0\leqslant x\leqslant 2l)$ *абсолютно непрерывна вместе со своими двумя первыми производными.*

2°. *Производная* dM/dx $(0\leqslant x\leqslant 2l)$ *отлична от нуля.*

При выполнении этих условий мы по формуле (6) можем построить функцию $\varphi(x)$, а по ней $q(x)$, но после этого может оказаться, что условия (7) несовместны (совместность условий (8) всегда является следствием совместности условий (7)).

Пусть $\rho(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ — некоторая неотрицательная суммируемая функция в интервале $(0, l)$.

Обозначим через $S^{(\rho)}(\alpha, \beta)$ спектр краевой задачи, получающейся из (1) путем замены уравнения $L_q y-\lambda y=0$ уравнением $y''+\lambda\rho(x)y=0$. Развитие идеи I приводит к решению задачи об определении функции $\rho(x)$ по двум различным спектрам $S^{(\rho)}(\alpha_i, \beta)$ $(i=1, 2)$ (т. е. задачи об определении плотности струны по двум ее спектрам частот).

Получающаяся здесь теорема единственности была доказана [1] только в предположении положительности функции $\rho(x)$ и ее абсолютной непрерывности, вместе с ее первой производной.

Кроме того, нам удалось обобщить эти результаты (соответствующим образом изменив постановку вопроса) на случай струны, длина и полная масса которой не обязательно конечны.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
11 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Borg, Acta Math., 78, 1—2 (1946). [2] Л. А. Чудов, Матем. сборн., 25 (67), № 3 (1949). [3] В. А. Марченко, ДАН, 72, № 3 (1950). [4] М. Г. Крейн, ДАН, **26**, № 1 (1940). [5] М. Г. Крейн, ДАН, **44**, № 5 (1944). [6] М. Г. Крейн, ДАН, **45**, № 3 (1944). [7] М. Г. Крейн, Укр. матем. журн., № 2 (1949).