Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

ГЕОФИЗИКА

Ф. Ф. ЮДАЛЕВИЧ

О ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ СУМЕРЕЧНЫХ ЯВЛЕНИЙ С УЧЕТОМ ВТОРИЧНОГО РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 25 X 1950)

Ранее автором было показано ([1]), что при определенных условиях можно получить числовое решение пространственной сумеречной задачи с учетом вторичного рассеяния, если известно решение плоской задачи. При этом все числовые результаты пространственной задачи получаются из уже найденных результатов плоской задачи по определенным правилам. Настоящая статья имеет целью формулировать эти правила в окончательном виде.

Формулируем те основные предположения, при которых решается поставленная задача:

1. Если h — высота элементарного объема над поверхностью земли, то предполагается, что распределение плотности воздуха с высотой выражается уравнением

$$\delta = \delta(h). \tag{1}$$

2. Пренебрегается рефракцией света в земной атмосфере.
3. Поверхность земли предполагается сферической.

Вообразим теперь сетку, построенную следующим образом. Обозначим через C_0 разрез земной поверхности по большому кругу. Разделим большой круг C_0 на n равных делений, длина каждого из которых равна $d = 2\pi R / n$, где R — радиус земного шара. В практических задачах мы принимаем $n = 360$. Пусть P_kP_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — вертикальные линии, построенные в точках делений. Каждая из вертикальных линий разделена в свою очередь на равные интервалы, из которых каждый соответствует в избранном масштабе 8 км. Возьмем на какой-нибудь вертикальной линии P_kP_k произвольную точку M_0 и вычислим яркость первичного света, который получает точка M_0 от всей атмосферы. Выберем точку M_0 за начало сферической системы координат. Полярную ось направим в плоскости чертежа перпендикулярно прямой P_kP_k. Плоскость чертежа определяет положение первой области, которую мы принимаем за начальную. Обозначим через k коэффициент рассеяния. Пусть точка M_1 лежит в первой области. Обозначим через M_1^t точку, лежащую в t-й области, симметричную с точкой M_1 относительно точки M_0. Очевидно, что

$$\exp\left[-k\int_{M_0}^{M_1^t}\delta(h)\,ds\right] = \exp\left[-k\int_{M_0}^{M_1}\delta(h)\,ds\right], \tag{2}$$

где ds — дифференциал пути луча в атмосфере.

Яркость прямой радиации, падающей на единицу поверхности элементарного объема, которому принадлежит точка M_1^t, будет равна

$$I_0 \exp\left[-k\int\limits_A^{M_1^t}\delta(h)\,ds\right], \tag{3}$$

где A — точка, лежащая на границе атмосферы, I_0 — световая солнечная постоянная.

Заметим, что если мы проведем плоскость перпендикулярно направлению солнечных лучей, то во всех точках этой плоскости, имеющих одинаковую высоту, яркость прямой солнечной радиации будет одинакова. Таким образом, каждому значению выражения (3) в пространстве соответствует взаимно-однозначным образом одно значение этого выражения в плоскости чертежа, что еще раз иллюстрирует, как решение пространственной задачи сводится целиком к использованию числовых результатов, полученных при решении плоской задачи.

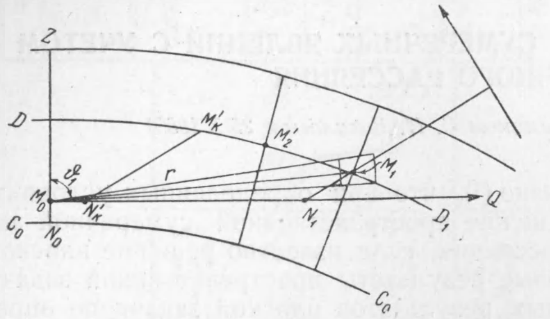

Рис. 1

Рассмотрим сферическую систему координат и, поместив полюс в точке M_0 (рис. 1), разобьем всю область, из которой точка M_0 может получать рассеянный свет, на элементарные объемы, разделив для этого круг широт и круг долгот на 360 равных частей, а каждый из радиусов-векторов — на равные деления, величина каждого из которых равна Δr. Возьмем в плоскости чертежа некоторую точку M_0. Пусть ее зенитное расстояние будет ϑ_1, а радиус-вектор в выбранной системе координат r_1. Положим, точка M_1 принадлежит элементарному объему Δv_1, тогда телесный угол, под которым элементарный объем Δv_1 виден из точки M_0, будет равен:

$$\Delta\omega = \sin\vartheta_1 (\pi / 180)^2. \tag{4}$$

Заметим теперь, что: 1) элементарному объему Δv_1, принадлежащему первой области, соответствует в каждой области элементарный объем, расположенный симметрично с объемом Δv_1 относительно точки M_0; 2) яркости, с которыми освещаются прямым солнечным светом тождественные элементарные площади, имеющие одинаковую высоту и лежащие в одной плоскости, перпендикулярной направлению солнечных лучей, будут одинаковы. Вращаем плоскость чертежа на угол 1°, тогда элементарный объем Δv_1, принадлежащий первой области, совместится с симметричным ему относительно точки M_0 элементарным объемом Δv_2, принадлежащим второй области; точка M_1, принадлежащая первой области, совпадает с симметричной ей относительно M_0 точкой M_2, принадлежащей второй области. Проводим через точку M_2 плоскость, перпендикулярную направлению солнечной радиации. Эта плоскость пересечет плоскость чертежа по некоторой прямой. Построим на этой прямой точку M'_2, высота которой над поверхностью земли равна высоте над поверхностью земли точки M_1 и, следовательно, высоте точки M_2. Очевидно, что точка M'_2 освещается прямой солнечной радиацией с той же яркостью, с которой освещается прямой солнечной радиацией точка M_2. Аналогичным образом получим величину яркости, с которой освещается прямой солнечной радиацией любая точка M_k, принадлежащая k-й области и расположенная симметрично с точкой M_1 относительно M_0.

Из геометрических соображений следует, что графически все эти операции можно проделать следующим образом. Из точки M_0 (рис. 1) восстанавливаем перпендикуляр M_0Q. Пусть стрелка показывает направление прямой солнечной радиации. Рассмотрим также точку M_1. Пусть яркость, с которой точка M_1 освещается прямой солнечной радиацией, будет I_1. Пусть точка M_1 принадлежит элементарному объему Δv_1, разрез которого изображен на рис. 1. Телесный угол, под которым этот элементарный объем виден из точки M_0, представлен выражением (4). Положим значение плотности в точке M_1 равным δ_1. Так как мы считаем элементарный объем однородным, то яркость, с которой точка M_0 освещается объемом Δv_1, будет $I_1\delta_1 \sin\vartheta_1 (\pi / 180)^2 e^{-\tau_1}$, где τ_1 — значение соответствующей атмосферной толщи. Проводим через точку M_1 прямую, перпендикулярную направлению прямой солнечной радиации. Она пересечет прямую M_0Q в точке N_1. Совместим точку M_1 с симметричной ей относительно точки M_0 точкой M_k, принадлежащей k-й области. Для этого нужно повернуть прямую M_0Q на k градусов. Точка N_1 совпадает с симметричной ей относительно точки M_0 и принадлежащей k-й области точкой N_k. Проведем через точку M_1 окружность, концентричную с окружностью C_0C_0 (C_0C_0 — большой круг земной сферы). Проведем через точку M_k плоскость, перпендикулярную направлению солнечной радиации. Эта плоскость пересечет плоскость чертежа по прямой $M'_kN'_k$ (M'_k — точка пересечения плоскости с окружностью DD_1, N'_k — точка пересечения плоскости с прямой M_0Q). Очевидно, что N'_k будет проекцией точки N_k на прямую M_0Q. Величина проекции отрезка M_0N_k на ось M_0Q будет:

$$\overline{M_0N_1} \cos (k\pi / 180). \tag{5}$$

Очевидно, что точка M'_k имеет ту же высоту, что и точка M_k. Очевидно также, что яркость I_k, с которой точка M'_k освещается прямой солнечной радиацией, равна яркости, с которой освещается точка M_k. Из сказанного следует, что яркость, с которой точка M_0 освещается элементарным объемом Δv_k, содержащим точку M_k, будет

$$I_k\delta_1 \sin\vartheta_1 (\pi / 180)^2 e^{-\tau} f_k, \tag{6}$$

где f_k — коэффициент, зависящий от вида индикатрисы.

Точно таким же образом мы можем вычислить яркость, с которой освещается точка M_0 любым элементарным объемом атмосферы.

Отсюда сразу следует метод вычисления яркости, с которой точка M_0 освещается всеми элементарными объемами, симметричными с точкой M_1 и находящимися на одной с ней высоте. Пусть (рис. 2) SS — разрез плоскостью чертежа цилиндрической поверхности солнечных лучей, огибающих земную поверхность. Тогда операции для решения этой задачи следует расположить следующим образом. Проводим через точку M_1 прямую, перпендикулярную направлению солнечных лучей. Пусть эта прямая пересечет прямую M_0Q в точке N_1. Давая k в выражении (7) последовательно значения 0, 1, 2, . . . , строим отрезки M_0N_1, M_0N_2, . . . и обрываем операцию тогда, когда одна из точек N_k либо совпадет с точкой N, либо окажется влево от точки N. Из точек деления восстанавливаем перпендикуляры к направлению прямой солнечной радиации. Пусть эти перпендикуляры пересекут окружность C_1C_1 в точках M_2, M_3, ... Пусть яркость первично рассеянного света в этих точках будет, соответственно, $I_2, I_3, \ldots, I_k$.

Из сказанного выше следует, что яркость, с которой точка M_0 освещается первичным светом, рассеянным всеми элементарными объемами, симметричными с точкой M_1 и находящимися с ней на одной высоте, будет

$$\sum_{k=1}^{n} I_k \sin\vartheta_1 (\pi / 180)\, e^{-\tau_1}\delta f_k = \sin\vartheta_1 (\pi / 180)^2 e^{-\tau_1}\delta_1 \sum_{k=1}^{n} I_k f_k.$$

После сделанного замечания вычисление значений яркости, с которой точка M_0 освещается первично рассеянным светом, идущим от всей освещенной области атмосферы, непредставляет больших затруднений.

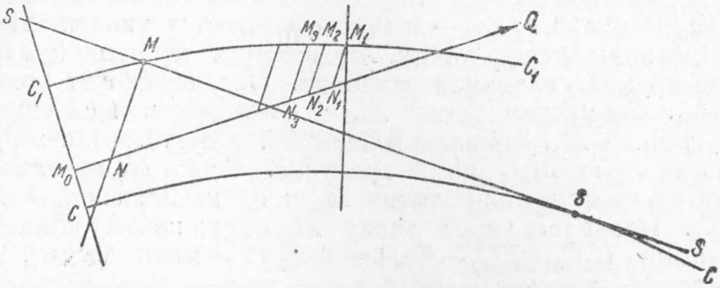

Рис. 2

В частности, если индикатриса сферическая, можно принять $f_k = 1$. В этом предположении проведены вычисления, результаты которых приведены в таблице значений отношения I_{II} / I_I, в зените, где I_{II} — яркость вторичного рассеяния, а I_I — яркость первичного рассеяния, для различных зенитных расстояний солнца (вычислена по данным астрофизической обсерватории в Абастумани) (см. табл. 1). Из этой таблицы следует, что вывод Гальбарта, снова подтвержденный им в 1947 г. ([5]), о быстром увеличении доли вторичного рассеяния света в яркости сумеречного неба в зените по мере увеличения $Z_\odot$ неправилен. Неправильность вывода Гальбарта указывается также в работах ([2–4]). Доля вторичного рассеяния света остается достаточно малой в любой момент сумерек.

Таблица 1

Зенитные расстояния солнца в °	I_{II}/I_I
94	0,30
96	0,49
98	0,76
100	0,78
102	0,87
103	0,97
104	1,16
105	1,39
106	1,68
107	2,40

Таким образом, сумеречный метод применим для исследования атмосферы вплоть до самых высоких слоев (200—250 км). Полученные выводы показывают, что для уточнения результатов нужно только вводить поправки на вторичное рассеяния.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. И. А. Хвостикову за советы и указания, касающиеся физического смысла задачи.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
9 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Ф. Юдалевич, ДАН, **55**, № 8 (1947). [2] Г. В. Розенберг, И. А. Хвостиков и Ф. Ф. Юдалевич, ДАН, **59**, № 7 (1948). [3] Н. М. Штауде, ДАН, **59**, № 7 (1948). [4] Т. Г. Мегрелишвили и И. А. Хвостиков, ДАН, **59**, № 7 (1948). [5] E. O. Hulburt, JOSA, **37**, 405 (1947).