Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. В. КАНТОРОВИЧ

ПРИНЦИП МАЖОРАНТ И МЕТОД НЬЮТОНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 XI 1950)

В моих недавних работах было проведено исследование аналога метода Ньютона для функциональных уравнений в линейных нормированных пространствах ([1,2]). С другой стороны, в свое время была выяснена возможность общего исследования сходимости последовательных приближений по принципу мажорант в пространствах более общей структуры — нормированных посредством элементов полуупорядоченного пространства ([3,4]). Здесь мы имеем в виду показать, что применение принципа мажорант возможно и для исследования аналога метода Ньютона. При этом оказывается, что таким путем не только удается более кратко и притом в уточненной форме получить прежние результаты, но и значительно обобщить и усилить их применением обобщенной нормы. В конкретных задачах, благодаря указанному усилению, существенно улучшаются границы сходимости. При рассмотрении вопроса оказывается весьма полезным применение аппарата теории нелинейных функциональных операций, развитого в работах М. К. Гавурина ([5,6]).

1. Вспомогательные определения. Будем говорить, что линейное множество X есть пространство, обобщенно нормированное посредством линейного полуупорядоченного пространства Z, если для некоторых пар элементов $x \in X$ и $z \in Z$ (для каждого x хоть при одном z) определено соотношение $\| x \| \leqslant z$, причем

1) если $\| x \| \leqslant z$ и $z \leqslant z'$, то $\| x \| \leqslant z'$;
2) $\| x \| \leqslant 0$ эквивалентно $x = 0$;
3) если $\| x_1 \| \leqslant z_1$, $\| x_2 \| \leqslant z_2$, то $\| x_1 + x_2 \| \leqslant z_1 + z_2$;
4) если $\| x \| \leqslant z$, то $\| \lambda x \| \leqslant |\lambda| z$.

Условимся писать $\| x \| \leqslant \| x' \|$, если $\| x' \| \leqslant z$ влечет $\| x \| \leqslant z$. Если $\| x \| \leqslant \| x' \|$ и $\| x' \| \leqslant \| x \|$, то пишем $\| x' \| = \| x \|$*. Будем писать $x_n \to x$, если имеются такие $z_n \geqslant 0$, что $\| x_n - x \| \leqslant z_n$ и $z_n \to 0$ (o). Пространство X предполагаем полным, т. е. предполагаем, что, если $\| x_n - x_m \| \leqslant z_{n,m}$ и $(o) \lim\limits_{n, m \to \infty} z_{n,m} = 0$, то имеется такое x, что $x_n \to x$.

Частным случаем рассматриваемого класса пространств являются пространства типа B_K (см. ([4]), стр. 455).

Пусть X и Y — линейные пространства, обобщенно нормированные посредством, соответственно, полуупорядоченных пространств Z и W. Тогда, если U — аддитивная и однородная операция из X в Y, а V — положительная аддитивная операция из Z в W, то будем писать

* Можно под $\| x \|$ понимать и множество тех z, для которых $\| x \| \leqslant z$.

$\| U \| \leqslant V$ и V называть мажорантой U, если $\| Ux \| \leqslant V(\| x \|)$, точнее, если $\| x \| \leqslant z$ влечет $\| Ux \| \leqslant Vz$.

В таком случае множество таких операций будет нормировано посредством полуупорядоченного пространства $Z \to W$ — регулярных операций из Z в W, при этом будем рассматривать в дальнейшем только такие U, для которых имеется (oo)-непрерывная мажоранта V.

Под производной мы понимаем слабую производную (соответствующую дифференциалу Гато), т. е. $P'(x) = U$ означает, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [P(x + t\Delta x) - P(x)] = U\Delta x$; при этом предполагается, что U — линейная операция указанного выше класса. Аналогично определяется вторая производная $P''(x)$, которая представляет билинейную операцию.

В дальнейшем, если функция $y = P(x)$ предполагается дифференцируемой на отрезке $(x, x + \Delta x)$, то считаем ее и равностепенно дифференцируемой на нем, т. е. считаем, что имеется такая монотонная функция $\omega(\delta) \in W$, $\inf\limits_{\delta > 0} w(\delta) = 0$, что

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} [P(x + (t + \Delta t)\Delta x) - P(x + t\Delta x)] - P'(x + t\Delta x) \right\| \leqslant \omega(|\Delta t|)$$

для $0 \leqslant t$, $t + \Delta t \leqslant 1$. В этом случае справедлива формула

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P'(\bar{x})\, d\bar{x} = \int\limits_{0}^{1} P'(x + \tau\Delta x)\, \Delta x\, d\tau = P(x + \Delta x) - P(x),$$

где интеграл взят по отрезку (интеграл в смысле Римана).

2. Метод последовательных приближений.

Лемма. *Если операция $\zeta = V(z)$ непрерывна, $z_1 = V(z_0) \geqslant z_0$, $V(z') \leqslant z'$ $(z' \geqslant z_0)$ и $V'(z) \geqslant 0$ (при $z_0 \leqslant z \leqslant z'$), то последовательные приближения $(z_{n+1} = V(z_n))$ сходятся к z^* — решению уравнения $z = V(z)$, причем $z_0 \leqslant z^* \leqslant z'$* (ср. [4], стр. 464).

Если имеется два уравнения, например, $x = U(x)$ и $z = V(z)$, будем сопоставлять между собой точки $(x \longleftrightarrow z)$ линий $x_0 x_1 \ldots$ и $z_0 z_1 \ldots$, соотнося точке $x = x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)$ точку $z = z_n + \theta(z_{n+1} - z_n)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$.

Теорема 1. *Если $x = U(x)$ и $z = V(z)$ — два уравнения, пространство X обобщенно нормировано посредством Z и выполнены следующие условия:*

1) *$U(x)$ и $V(z)$ непрерывны для используемых x и z;*
2) *$\| U'(x) \| \leqslant V'(z)$ для $x \longleftrightarrow z$;*
3) *$\| U(x_0) - x_0 \| \leqslant V(z_0) - z_0$;*
4) *уравнение $z = V(z)$ имеет решение $z^* \geqslant z_0$,*

то уравнение $x = U(x)$ имеет решение x^*, к которому сходятся последовательные приближения, при этом

$$\| x^* - x_0 \| \leqslant z^* - z_0.$$

Легко устанавливается с помощью индуктивно доказываемой оценки $\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant z_{n+1} - z_n$.

3. Модифицированный процесс. Для уравнения

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где P — операция из X в Y, последовательные приближения в процессе Ньютона определяются формулами [1]

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \quad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (*)$$

и в модифицированном процессе формулами

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_0)]^{-1}P(x_n) \quad (n=0,1,2,\ldots). \qquad (**)$$

Аналогичные процессы рассмотрим для уравнения

$$Q(z)=0, \tag{2}$$

где Q — операция из Z в W.

Теорема 2. *Если в уравнениях* (1) *и* (2) P *и* Q — *непрерывные и дважды дифференцируемые операции, соответственно, на путях* $x_0x_1x_2\ldots$ *и* $z_0z_1z_2\ldots$ *и выполнены условия:*

1) *существуют* $[P'(x_0)]^{-1}=\Gamma_0$ *и* $[Q'(z_0)]=\Delta_0$ *причем* Δ_0, *(oo)-непрерывна и* $\|\Gamma_0\|\leqslant-\Delta_0$;

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\|\leqslant-\Delta_0 Q(z_0)$;

3) $\|\Gamma_0 P''(x)\|\leqslant-\Delta_0 Q''(z)$ *для* $x\longleftrightarrow z$,

то из сходимости модифицированного процесса для уравнения (2) *вытекает существование решения* x^* *и сходимость процесса для уравнения* (1), *причем* $|x^*-x_n|\leqslant z^*-z_n$.

Получается применением предыдущей теоремы, так как процесс $(**)$ можно рассматривать как обычный процесс последовательных приближений для уравнения $x=U(x)=x-\Gamma_0 P(x)$.

4. Основной процесс Ньютона.

Теорема 3. *При условиях предыдущей теоремы, с разницей, что имеются в виду пути, определяемые формулами* $(*)$, *из осуществимости и сходимости процесса Ньютона для уравнения* (2) *следует его осуществимость и сходимость для уравнения* (1).

Наметим ход доказательства. Так как первый шаг в обоих процессах $(*)$ и $(**)$ совпадает, заключаем, что $\|x_1-x_0\|\leqslant z_1-z_0$. Далее, на основании формулы Тэйлора,

$$\Gamma_0 P(x_1)=\Gamma_0\int_{x_0}^{x_1}(x_1-\bar{x})P''(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Сопоставляя это с аналогичным выражением для $\Delta_0 Q(z_1)$, имеем $\|\Gamma_0 P(x_1)\|\leqslant-\Delta_0 Q(z_1)$. Далее, так как

$$\|I-\Gamma_0 P'(x_1)\|=\left\|-\int_{x_0}^{x_1}\Gamma_0 P''(x)\,dx\right\|\leqslant-\Delta_0\int_{z_0}^{z_1}Q''(z)\,dz=I-\Delta_0 Q'(z_1),$$

а оператор $I-(I-\Delta_0 Q'(z_1))$ имеет положительный обратный, равный $[Q'(z_1)]^{-1}Q'(z_0)$, заключаем (ср. [2], стр. 463, 154), что существует оператор $\Gamma_1=[P'(x_1)]^{-1}$, и при этом $\|\Gamma_1\|\leqslant-[Q'(z_1)]^{-1}=-\Delta_1$. Теперь легко проверить, что если заменить в условиях теоремы точки x_0 и z_0 на x_1 и z_1, эти условия попрежнему будут выполнены, а потому аналогичный процесс может быть продолжен далее.

Замечание. Сходимость процесса Ньютона для уравнения (2) можно было бы заменить требованием существования решения для него или наличия такого z' $(z'\geqslant z_0)$, что $Q(z')\leqslant 0$.

5. Применения.

Следствие 1 (нормированный случай). Если X и Y — нормированные пространства и $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta$, $\| \Gamma_0 \| \leqslant B$, $\| P''(x) \| \leqslant K$ в области, содержащей $x_0 x_1 \ldots$ (достаточно при $\| x - x_0 \| \leqslant z^*$), и $h = BK\eta \leqslant {}^1/_2$, то процесс Ньютона и модифицированный сходятся и $\| x^* - x_0 \| \leqslant z^*$, где z^* — меньший корень квадратного уравнения

$$Q(z) = \frac{1}{2} K z^2 - \frac{1}{B} z + \frac{\eta}{B} = 0;$$

быстрота сходимости характеризуется неравенством $\| x_n - x^* \| \leqslant z^* - z_n$. Это покрывает ранее полученные результаты ([2], теоремы I и III) и дополнительно дает сходимость модифицированного процесса для $h = {}^1/_2$ (иным путем последнее установил и И. П. Мысовских), а также точную характеристику быстроты сходимости.

Следствие 2. Пусть $|\Gamma_0| \leqslant B \in (Z \to Z)$, $|P(x_0)| \leqslant \eta_1 \in Z$, $|P''(x)| \leqslant K$, K — билинейная операция из Z в Z) и при этом

$$2K\eta\eta \leqslant \eta_1 \quad (\eta = B\eta_1).$$

Тогда процесс Ньютона для уравнения (1) сходится.

Поступило
19 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, ДАН, 59, 117 (1948). [2] Л. В. Канторович, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 28, 104 (1949). [3] Л. В. Канторович, Уч. Зап. ЛГУ, № 17 (1937). [4] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, 1950. [5] М. К. Гаврин, ДАН, 22, 547 (1939). [6] М. К. Гаврин, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 19, 59 (1950).