Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. В. МАЛЫШЕВ

ОБ ИДЕАЛЬНО СЫПУЧЕМ КЛИНЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ПРЕДЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 13 X 1950)

Для решения задачи о плоском невесомом предельно напряженном клине при совпадении полюса системы координат $r\theta z$ с его вершиной, следует подобрать такую функцию напряжений $\varphi(r, \theta)$, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению предельного равновесия

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)^2+4\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right]^2}}{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}}=\sin\rho, \tag{1}$$

где ρ — угол внутреннего трения среды.

Если вдоль грани клина действует нагрузка, изменяющаяся по степенному закону, функция напряжений имеет вид $\varphi = r^n f(\theta)$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) превратится в уравнение обыкновенное однородное. Положив $f(\theta) = Ce^{m\theta}$ и разрешая уравнение (1) относительно m, получим один из корней равным

$$m = \pm\sqrt{4(n-1)\,\mathrm{tg}^2\rho-(n-2)^2}. \tag{2}$$

Решение (2) в частном случае при $n=2$ переходит в решение Прандтля ($m=-2\,\mathrm{tg}\,\rho$), рассматривавшего клин при наличии равномерной нагрузки вдоль одной из его граней [1].

Компоненты напряжений в исследуемой задаче имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= Cr^{n-2}(n+m^2)\,e^{m\theta},\\ \sigma_\theta &= Cr^{n-2}n(n-1)\,e^{m\theta},\\ \tau_{r\theta} &= -Cr^{n-2}m(n-1)\,e^{m\theta},\end{aligned} \tag{3}$$

где m определяется в соответствии с (2).

Угол δ, составленный направлением нагрузки (рис. 1) и нормалью к загруженной грани, равен

$$|\delta| = \mathrm{arctg}\left|\frac{m}{n}\right|. \tag{4}$$

Определенные по формуле (2) значения m оказываются действительными при

$$\mathrm{tg}\,\rho > \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}. \tag{5}$$

При получении мнимых значений m следует в (3) произвести замену по формулам Эйлера. При этом во вновь полученных выражениях компонент напряжений необходимо рассматривать лишь их действительную часть.

На основании полученных зависимостей для компонент напряжений (3) путем несложных преобразований можно получить уравнение линий скольжения (вдоль линий скольжения удовлетворяется условие $|\tau_{NT}|/\sigma_N = \operatorname{tg}\rho$ ([2])):

$$r = C_1 e^{\theta \operatorname{ctg} \alpha_0}; \tag{6}$$

здесь α_0 — угол, составляемый линией скольжения и соответствующим радиусом-вектором (рис. 1), который может быть определен по формуле:

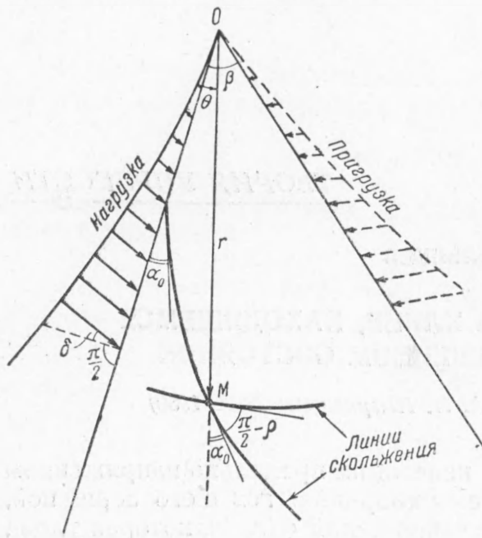

Рис. 1

$$\alpha_{0_{1,2}} = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{m^2 - n^2 + 2n \pm 2m(n-1)\operatorname{tg}\rho}{\mp (m^2 + n^2)\operatorname{tg}\rho} + k\frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

причем m берется по (2). Для первого семейства линий скольжения выбираем в (7) верхний знак и $k = 0$, для второго нижний знак и $k = 1$.

Как следует из (6), линии скольжения представляются двумя семействами логарифмических спиралей.

При $n = 2$ и $m = -2\operatorname{tg}\rho$ (задача Прандтля) α_{0_1} получается равным нулю и соответствующее семейство линий скольжения вырождается в пучок прямых с вершиной в начале координат.

Поступило
29 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Prandtl, ZAMM, 1 (1921). [2] В. В. Соколовский, Статика сыпучей среды, изд. АН СССР, 1942.