Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. С. АРЖАНЫХ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЕКТОРА ДЕФОРМАЦИИ СТАТИКИ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 27 X 1950)

Будем предполагать, что граничная поверхность S упругого тела такова, что существуют функции Грина $\Gamma = G + \frac{1}{R}$ и $N = H + \frac{1}{R}$ проблем Дирихле и Неймана ($R = pq$). Вектор нормали $\mathbf{n}(s)$ направим вне Q (Q внутри S или вне S).

Лемма. *Вектор деформации удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\mathbf{u}(p) = \frac{1}{4\pi\mu}\int_Q \Gamma(p, r)\,\mathbf{f}(r)\,dr + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\int_Q \Gamma\nabla_r\theta\,dr - \frac{1}{4\pi}\int_S \mathbf{u}\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\,ds. \qquad (*)$$

В самом деле, заменим с помощью уравнения равновесия в формуле

$$\mathbf{u}(p) = -\frac{1}{4\pi}\int_Q \Gamma\nabla^2\mathbf{u}\,dr - \frac{1}{4\pi}\int_S \mathbf{u}\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\,ds$$

величину

$$\nabla^2\mathbf{u} = -\frac{1}{\mu}\mathbf{f} - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\nabla\theta, \quad \theta = \operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Теорема 1. *Вектор деформации первой задачи (когда задано смещение $\mathbf{u}_s$) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:*

$$\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_* + \varkappa\int_Q B(p, q)\,\mathbf{u}(q)\,dq, \qquad (1)$$

где

$$\varkappa = \frac{(\lambda+\mu)^2}{16\pi^2\mu(\lambda+2\mu)},$$

$$B(p, q) = \int_Q \Gamma(p, r)\left(\{\nabla_r\cdot\nabla_q\} - \{\nabla_r\times\nabla_q\}\right)(\nabla_r\nabla_q)\,G(r, q)\,dr,$$

$$\mathbf{u}_* = \frac{1}{4\pi\mu}\int_Q \Gamma(p, q)\,\mathbf{f}\,dq - \frac{1}{4\pi}\int_S \mathbf{u}_s\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\,ds + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\int_Q \Gamma(p, r)\,t_*(r)\,dr,$$

$$t_* = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)} \nabla_r \left(\operatorname{div}_r \int_Q \Gamma(r,q)\, \mathbf{f}\, dq - \mu \operatorname{div}_r \int_S \mathbf{u}_s \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds - \right.$$

$$\left. - (\lambda+\mu) \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{u}_s)(\nabla_r \nabla_s) G(r,s)\, ds \right).$$

Доказательство. Объемное расширение, как было показано [1] удовлетворяет интегральному уравнению

$$4\pi(\lambda+2\mu)\,\theta(r) = t(r) - (\lambda+\mu) \int_Q \theta(q)(\nabla_r \nabla_q) G(r,q)\, dq.$$

Следовательно,

$$4\pi(\lambda+2\mu)\,\theta(r) = t(r) - (\lambda+\mu) \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{u}_s)(\nabla_r \nabla_s) G\, ds +$$

$$+ (\lambda+\mu) \int_Q (\mathbf{u} \nabla_q (\nabla_r \nabla_q) G)\, dq.$$

Отсюда находим

$$\nabla_r \theta = t_*(r) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int_Q A(r,q)\, \mathbf{u}(q)\, dq,$$

$$A = (\{\nabla_r \cdot \nabla_q\} - \{\nabla_r \times \nabla_q\})(\nabla_r \nabla_q) G(r,q).$$

Заменяя в уравнении ($*$) $\nabla_r \theta$, получаем уравнение (1).

Теорема 2. *Вектор деформации второй задачи (когда заданы силы $d_n \mathbf{u}$) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:*

$$\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_{**} + \varkappa \int_S \Sigma(p,s)\, \mathbf{u}(s)\, ds + \varkappa \int_Q D(p,q)\, \mathbf{u}(q)\, dq, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{u}_{**} = \frac{1}{4\pi\mu} \int_Q \Gamma(p,q)\, \mathbf{f}\, dq + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu} \int_Q \Gamma(p,r)\, \vartheta_*(r)\, dr,$$

$$\vartheta_* = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)} \nabla_r \left(\operatorname{div}_r \int_Q N(r,q)\, \mathbf{f}\, dq + \operatorname{div}_r \int_S N(r,s)\, d_n \mathbf{u}\, ds \right).$$

Тензоры Σ и D имеют следующую структуру:

$$\Sigma(p,s) = \int_Q \Gamma(p,r)(\lambda_0 \mathrm{Z} + \mu_0 \Xi)\, dr - \frac{1}{4\pi\varkappa} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Gamma}{\partial n},$$

$$\mathrm{Z}\vec{\xi} \equiv -(\vec{\xi}\mathbf{n})\, \nabla_r (\nabla_r \nabla_s) H(r,s),$$

$$\Xi\vec{\xi} \equiv ([\vec{\xi}\mathbf{n}]\, \nabla_r)[\nabla_r \nabla_s] H + [[\vec{\xi}\mathbf{n}][\nabla_r [\nabla_r \nabla_s]]] H,$$

$$D(p,q) = \int_Q \Gamma(p,r)(\lambda_0 \Lambda + \mu_0 \mathrm{M})\, dr,$$

$$\Lambda\vec{\xi} \equiv (\vec{\xi}\nabla_r)\nabla_q(\nabla_r\nabla_q)H + [\vec{\xi}[\nabla_r\nabla_q](\nabla_r\nabla_q)H],$$

$$\mathrm{M}\vec{\xi} \equiv -(\vec{\xi}\nabla_r)[\nabla_q[\nabla_r\nabla_q]]H - [\vec{\xi}[\nabla_r[\nabla_q[\nabla_r\nabla_q]]]]H,$$

где $\lambda_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Доказательство. Объемное расширение и вихрь второй задачи удовлетворяют следующему уравнению ([1]):

$$4\pi(\lambda+2\mu)\theta(r) = \vartheta(r) - \lambda\int_Q \varepsilon(r, q)\theta\,dq - \mu\int_Q (\mathbf{e}\vec{\Omega})\,dq,$$

$$\varepsilon = (\nabla_r\nabla_q)H, \quad \mathbf{e} = [\nabla_r\nabla_q]H.$$

Следовательно,

$$4\pi(\lambda+2\mu)\theta(r) = \vartheta(r) - \lambda\int_S \varepsilon(\mathbf{n}, \mathbf{u})\,ds - \mu\int_S (\mathbf{n}[\mathbf{u}, \mathbf{e}])\,ds +$$

$$+ \lambda\int_Q (\mathbf{u}\nabla_q\varepsilon)\,dq - \mu\int_Q (\mathbf{u}\,\mathrm{rot}_q\,\mathbf{e})\,dq.$$

Отсюда находим

$$\nabla_r\theta(r) = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\Big\{\nabla_r\vartheta - \lambda\int_S (\mathbf{n}, \mathbf{u})\nabla_r\varepsilon\,ds - \mu\int_S (([\mathbf{n}, \mathbf{u}]\nabla_r)\mathbf{e} +$$

$$+ [[\mathbf{n}, \mathbf{u}]\,\mathrm{rot}_r\,\mathbf{e}])\,ds + \lambda\int_Q ((\mathbf{u}\nabla_r)\nabla_q\varepsilon + [\mathbf{u}\,\mathrm{rot}_r\nabla_q\varepsilon])\,dq -$$

$$- \mu\int_Q ((\mathbf{u}\nabla_r)\,\mathrm{rot}_q\,\mathbf{e} + [\mathbf{u}\,\mathrm{rot}_r\,\mathrm{rot}_q\,\mathbf{e}])\,dq\Big\}.$$

Выполнив замену в уравнении (*), получим уравнение (2).

Интересно отметить, что $\varkappa$, λ_0, μ_0 выражаются только через коэффициент Пуассона σ:

$$\varkappa = \frac{1}{32\pi^2}\frac{1}{(1-2\sigma)(1-\sigma)}, \quad \lambda_0 = 2\sigma, \quad \mu_0 = 1 - 2\sigma. \tag{3}$$

Модуль Юнга входит в $\mathbf{u}_*$ и $\mathbf{u}_{**}$.

Для металлов параметры построенных уравнений имеют следующие начения (см. табл. 1).

Таблица 1

Металлы	σ	$\varkappa$	λ_0	μ_0
Сталь . . .	0,310	0,011	0,620	0,380
Константан . .	0,325	0,013	0,650	0,350
Латунь	0,327	0,013	0,654	0,346
Алюминий . .	0,339	0,014	0,678	0,322
Бронза	0,358	0,016	0,716	0,284
Серебро . . .	0,379	0,020	0,758	0,242
Золото	0,422	0,033	0,844	0,156
Свинец	0,446	0,050	0,892	0,108

Вектор деформации первой задачи с точностью до $\varkappa^2$ имеет величину

$$\mathbf{u}(p) \cong \mathbf{u}_* + \varkappa \int_Q B(p, q)\, \mathbf{u}_*\, dq. \tag{4}$$

Для получения приближенной формулы, определяющий с той же точностью вектор деформации второй задачи

$$\mathbf{u}(p) \cong \mathbf{v}_0 + \varkappa \mathbf{v}_1, \tag{5}$$

необходимо предварительно определить $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ из следующих интегральных уравнений:

$$\mathbf{v}_0(p) = \mathbf{u}_{**} - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \mathbf{v}_0\, ds,$$

$$\mathbf{v}_1(p) = \mathbf{v}_* - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \mathbf{v}_1\, ds, \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_* = \int_S \mathbf{v}_0\, ds \int_Q \Gamma(p, r)(\lambda_0 Z + \mu_0 \Xi)\, dr + \int_Q D(p, q)\, \mathbf{v}_0\, dq.$$

Интегральное слагаемое $-\frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{d\Gamma}{\partial n} ds$ уравнений (6) возникает и в других задачах механики сплошной среды.

Покажем, что интегральное слагаемое указанного типа имеет значение и для гидродинамики идеальной жидкости.

Рассмотрим область $Q + S$, занятую баротропной жидкостью, движущейся под действием потенциальных массовых сил $\mathbf{F} = \nabla_q U$.

Удельная энергия $\tau = \frac{1}{2} v^2 + \int \frac{\partial P}{\rho} - U$ *удовлетворяет в области* $Q + S$ *следующему интегро-дифференциальному уравнению:*

$$\tau(p) = \frac{1}{4\pi} \int_Q (\nabla_q \Gamma, \nabla_q \tau)\, dq - \frac{1}{4\pi} \int_S \tau(s) \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds. \tag{7}$$

В самом деле, заменим в формуле

$$\tau(p) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \Gamma \nabla_q^2 \tau\, dq - \frac{1}{4\pi} \int_S \tau \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds$$

величину $\nabla_q^2 \tau = \operatorname{div}_q [\mathbf{v}\vec{\Omega}]$, выполним преобразование $\Gamma \operatorname{div}_q [\mathbf{v}\vec{\Omega}] = \operatorname{div}_q \Gamma [\mathbf{v}\vec{\Omega}] - (\nabla_q \mathbf{F} [\mathbf{v}\vec{\Omega}])$, проинтегрируем первое слагаемое по теореме Остроградского — Гаусса, а затем заменим из уравнения движения жидкости $[\mathbf{v}\vec{\Omega}] = \nabla_q \tau$.

Если S не есть граница, а является какой-либо замкнутой неподвижной поверхностью внутри жидкости, то функция Γ может и не удовлетворять граничному условию $\Gamma = 0$ на S, так как в этом случае $(\mathbf{n}\,[\mathbf{v}\vec{\Omega}]) - \frac{\partial \tau}{\partial n} = 0$.

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
7 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, Докл. АН Узб.ССР, № 9 (1950).