Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

МЕХАНИКА

В. С. КОВАЛЬСКИЙ

НАГРУЗКА БАРАБАНА ПОДЪЕМНОЙ МАШИНЫ ВИТКАМИ КАНАТА

(Представлена *академиком* А. И. Некрасовым 20 X 1950)

Давление витков каната на стенку барабана не является, как то обычно допускают, постоянным вдоль образующей — каждый вновь навиваемый виток изменяет радиус барабана под ранее навитыми витками, и натяжение в последних соответственно изменяется. Оценка влияния упругих деформаций стенки барабана на натяжение витков каната и, следовательно, на нагрузку стенки может быть получена следующим образом.

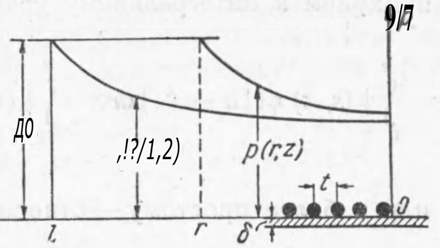

Рис. 1

Обозначим натяжение в витке каната на расстоянии z от начала координат (от первого витка) при длине загружения барабана канатом l через $S(l,z)$, при длине загружения r — через $S(r,z)$ и т. д., причем очевидно, что $S(l,l) = S(r,r) = S_0$, где S_0 — натяжение набегающего конца каната, которое для кранов и многих лебедок может быть принято постоянным.

При достаточно большом числе витков каната радиальную нагрузку стенки барабана полагаем распределенной:

$$p(r,z) = \frac{S(r,z)}{Rt}, \quad p_0 = \frac{S_0}{Rt},$$

где R — радиус барабана, t — шаг навивки каната (рис. 1).

Рассматривая полоску сечением $1 \times \delta$ (δ — толщина стенки барабана), вырезанную вдоль образующей цилиндра, как балку на упругом основании ([1]), находим прогиб полоски в r от нагрузки $p(r,z)$ на участке $0r$:

$$y(r,r) = \frac{1}{8\beta^3 D}\int_0^r p(r,z)\,\eta(r-z)\,dz,$$

где

$$\eta(x) = e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x),$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2\delta^2}}, \qquad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Дальнейшая навивка каната — до l — изменит нагрузку полоски, и прогиб в r станет равным

$$y(l, r) = \frac{1}{8\beta^3 D} \int_0^l p(l, z)\,\eta(|r - z|)\,dz,$$

т. е. изменится на

$$\Delta = \frac{1}{8\beta^3 D} \left\{ \int_0^l p(l, z)\,\eta(|r - z|)\,dz - \int_0^r p(r, z)\,\eta(r - z)\,dz \right\}.$$

Так как, с другой стороны, очевидно равенство

$$\Delta = \frac{R}{E_k F_k} [S(r, r) - S(l, r)] = \frac{R^2 t}{E_k F_k} [p_0 - p(l, r)],$$

где E_k — модуль упругости и F_k — площадь сечения каната, то, вводя безразмерные величины

$$x = \beta z, \quad u = \beta r, \quad s = \beta l,$$

$$\psi(s, u) = \frac{p(l, r)}{p_0}, \quad \varepsilon = \frac{E_k F_k}{E\delta t},$$

приходим к интегральному уравнению относительно $\psi(s, u)$:

$$\int_0^s \psi(s, x)\,\eta(|u - x|)\,dx - \int_0^u \psi(u, x)\,\eta(u - x)\,dx = \frac{2}{\varepsilon} [1 - \psi(s, u)], \tag{1}$$

или к более простому — относительно $\varphi(s, u) = \frac{\partial}{\partial s}\psi(s, u)$:

$$\frac{2}{\varepsilon}\varphi(s, u) + \int_0^s \varphi(s, x)\,\eta(|u - x|)\,dx = -\eta(s - u), \tag{2}$$

решение которого, если обозначить $\alpha^4 = 1 + \varepsilon$, имеем в виде

$$\varphi(s, u) \approx -\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha(\alpha + 1)} e^{-\alpha s} (\alpha \operatorname{ch} \alpha u + \operatorname{sh} \alpha u) [\alpha \cos \alpha (s - u) + \sin \alpha (s - u)] \tag{3}$$

знак $\approx$ вызван исключением исчезающе малых членов в написанном интеграле; при реальных соотношениях размеров стенки барабана и каната погрешность не превышает 0,1%).

Интегрируя (3) по s и имея $\psi(s, s) = 1$, находим, что

$$\psi(s, u) = 1 - \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha^2} e^{-\alpha s} \Big\{ \alpha \operatorname{ch} \alpha s + \operatorname{sh} \alpha s -$$

$$- (\alpha \operatorname{ch} \alpha u + \operatorname{sh} \alpha u) \left[\cos \alpha (s - u) - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \sin \alpha (s - u)\right] \Big\}. \tag{4}$$

Легко заметить, что с ростом s величина $\psi(s, u)$ очень быстро приближается к своему значению на бесконечности

$$\psi_0 = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E_k F_k}{E \delta t}}}, \tag{5}$$

поэтому закон изменения нагрузки у набегающего конца каната легко получить, стремя s к ∞ и u к ∞ так, что $s - u = v$; при этом получаем

$$\psi(v) = \psi_0 + (1 - \psi_0) e^{-\alpha v} \left(\cos \alpha v - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \sin \alpha v \right). \tag{6}$$

Уже при малых v (при 2—3 витках для кранового барабана и 3—5 витках для барабана шахтной подъемной машины) величина $\psi(v)$ весьма мало отличается от ψ_0 и, практически, корректирующим коэффициентом к общераспространенным расчетам стенки барабана на сжатие может служить величина ψ_0 по (5).

Например, при $E_k = 16\,000$ кг/мм², $E = 10\,000$ кг/мм², $F_k = 0{,}37\ d^2$ (для обычных шестипрядных канатов), $\delta = t$ и $t = 1{,}2\,d$ имеем $\psi_0 = 0{,}82$. В случае стального барабана, $E = 21\,000$ кг/мм² и $\delta = 0{,}3\,d$ имеем $\psi = 0{,}7$.

В приведенном решении полоска рассматривалась как бесконечная, в других же случаях, при навивке у торцов барабана или при наличии кольцевых ребер жесткости, вместо функции влияния $\eta(x)$ следует ввести иные на основании имеющихся решений для балки на упругом основании.

Полученное решение справедливо при условии нескольжения каната на барабане. Покажем, что это условие действительно имеет место. Так как закон изменения натяжения в канате может быть представлен в виде

$$S(s, u) = \psi(s, u) S_0,$$

то

$$S'_u(s, u) = \psi'_u(s, u) S_0.$$

Если θ — угол охвата барабана канатом и $\rho = \operatorname{arctg} \frac{t}{2\pi R}$ — угол подъема винтовой линии, то

$$u = \beta z = \beta R \theta \operatorname{tg} \rho = \frac{\beta t}{2\pi},$$

$$S'_\theta = \frac{\beta t}{2\pi} S_0 \psi'_u(s, u).$$

Так как из зависимости Эйлера следует

$$S'_\theta = f S_0,$$

то условие нескольжения записывается в виде

$$\frac{\beta t}{2\pi} \psi'_u(s, u) \leqslant f,$$

или, в худшем случае, для области у набегающего конца каната, заменяя $\psi'_u(s, u)$ на $\psi'_u(s, s)$:

$$\frac{\beta t}{\pi} (\alpha - 1) \leqslant f,$$

что после подстановки $\beta \approx 1{,}28 / \sqrt{R\delta}$ имеет вид

$$0{,}4\,(\alpha - 1)\,\frac{1}{\sqrt{R\delta}} \leqslant f. \qquad (7)$$

При широких пределах изменения α, R, δ и t левая часть неравенства равна 0,015—0,02, в то время как $f = 0{,}1$—$0{,}15$, следовательно, условие (7) всегда удовлетворяется.

Поступило
8 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, ч. 2, 1932.