Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. И. ФЕЛЬДМАН

О СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ НЕСКОЛЬКИХ ЛОГАРИФМОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 X 1950)

Высотой многочлена будем называть максимум абсолютных величин его коэффициентов. Высотой алгебраического числа ζ будем называть высоту неприводимого многочлена, корнем которого является ζ. Общей степенью алгебраических чисел $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ будем называть степень поля, образованного присоединением к полю рациональных чисел величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$. Общей степенью многочленов $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ будем называть наибольшую из степеней полей, образованных присоединением к полю рациональных чисел r величин $\zeta_{1,i_1}, \ldots, \zeta_{r,i_r}$, где каждый из индексов i_t независимо пробегает значения $1, 2, \ldots, n_t$, а величины $\zeta_{t,1}, \ldots, \zeta_{t,n_t}$ суть корни многочлена $P_t(x)$ степени n_t. Очевидно, общая степен многочленов $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ не превосходит величины $n_1 n_2 \ldots n_r$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — алгебраические числа, логарифмы которых $\ln\alpha_1, \ldots, \ln\alpha_r$ линейно независимы в поле рациональных чисел. Тогда*

$$|\ln\alpha_1 - \xi_1| + \ldots + |\ln\alpha_r - \xi_r| \geqslant$$
$$\geqslant \exp\left[-\Lambda n^{1+\frac{1}{r}} (\ln H + n\ln n + 2)\ln^{1/2}(\ln H + n\ln n + 2)\right],$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — алгебраические числа высот $H_1, \ldots, H_r$; $H = \max H_i$, n — общая степень чисел $\xi_1, \ldots, \xi_r$, а Λ — величина, зависящая от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и от выбора ветвей логарифмов $\ln\alpha_1, \ldots, \ln\alpha_r$, но не зависящая от n и H.

Теорема 2. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — алгебраические числа, логарифмы которых $\ln\alpha_1, \ldots, \ln\alpha_r$ линейно независимы в поле рациональных чисел. Тогда*

$$|P_1(\ln\alpha_1)| + \ldots + |P_r(\ln\alpha_r)| \geqslant$$
$$\geqslant \exp\left[-\Lambda_1 n^{1+\frac{1}{r}} (\ln H + n\ln n + 2)\ln^{1/2}(\ln H + n\ln n + 2)\right],$$

где n — общая степень многочленов с целыми рациональными коэффициентами $P_1(x), \ldots, P_r(x)$, H — наибольшая из высот этих многочленов, а Λ_1 — величина, зависящая от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и от выбора ветвей логорифмов $\ln\alpha_1, \ldots, \ln\alpha_r$, но не зависящая от n и H.

Частный случай $r = 1$ рассматривался ранее ([1]). Для доказательства теорем 1 и 2 использован в основном метод, применявшийся при рассмотрении частного случая, и приводимые ниже леммы.

Лемма 1. *Если p — простое число и*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{l=0}^{p-1}C_{k,l}\,z^k e^{lz},$$

то

$$C_{k,l}=\sum_{x=0}^{pq-1}f\left(\frac{2\pi xi}{p}\right)\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}\,\frac{\delta_{l,y}}{\delta}\left(\frac{p}{2\pi i}\right)^k,$$

где x, t *и* y *связаны равенством* $x=pt+y$,

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ y & y+p & \dots & y+p(q-1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y^{q-1} & (y+p)^{q-1} & \dots & [y+p(q-1)]^{q-1}\end{vmatrix},$$

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{p-1}\\ 1 & \rho^2 & \rho^4 & \dots & \rho^{2(p-1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \rho^{p-1} & \rho^{2(p-1)} & \dots & \rho^{(p-1)^2}\end{vmatrix},\quad \rho=e^{2\pi i/p},$$

$\Delta_{k,t,y}$ — *минор элемента* $(pt+y)^k$ *определителя* Δ_y, *а* $\delta_{l,y}$ — *минор элемента* ρ^{ly} *определителя* δ.

Лемма 2. *Если p — простое число и*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{l=0}^{p-1}C_{k,l}\,z^k e^{lz},$$

$$\delta=\max_{0\leqslant x\leqslant pq-1}\left|f\left(\frac{2\pi ix}{p}\right)\right|,$$

то

$$|C_{k,l}|\leqslant \delta q\,(4p)\ \ (4e)^p.$$

Теоремы 1 и 2 эффективны, числа Λ и Λ_1 вычислимы.

В заключение я пользуюсь случаем выразить мою глубокую благодарность проф. А. О. Гельфонду за постановку рассмотренной здесь задачи.

Поступило
12 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Фельдман, ДАН, 66, № 4 (1949).