Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

И. ГОХБЕРГ

О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 XI 1950)

§ 1. В этой заметке мы будем рассматривать линейные ограниченные операторы, определенные в пространстве Гильберта H.

Буквой B будем обозначать обратимый оператор, а буквой T — вполне непрерывный. Оператор, сопряженный к оператору A, будем обозначать через A^*. Наконец, выражение „число решений однородного уравнения" будет всюду заменять более длинное: „число линейно независимых решений однородного уравнения".

Теория Ф. Рисса [1] линейного уравнения

$$x - Tx = y,$$

где $x, y \in C$ (C — пространство непрерывных функций), а T — вполне непрерывный оператор, определенный в H, была обобщена на произвольное пространство типа Банаха Шаудером.

Основные теоремы Рисса — Шаудера применительно к рассматриваемому гильбертову пространству H можно сформулировать следующим образом:

а) Однородные уравнения

$$U\varphi = \varphi - T\varphi = 0, \quad U^*\varphi = \psi - T\psi = 0$$

имеют одинаковые конечные числа решений.

б) Оператор U (соответственно U^*) нормально разрешим, т. е. для разрешимости неоднородного уравнения $U\varphi = f$ (соответственно $U^*\psi = f_1$) не только необходимо, но и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна ко всем решениям однородного уравнения $U^*\psi = 0$ (соответственно $U\varphi = 0$).

С. М. Никольский [2] установил необходимые и достаточные условия, при которых для оператора U имеет место теория Рисса — Шаудера. Для формулировки его теоремы введем следующее определение.

Определение. Будем говорить, что оператор U удовлетворяет условию N, если он представим в виде суммы операторов $U = B + T$, из которых B — обратимый, а T — вполне непрерывный.

Теорема С. М. Никольского. *Условие N необходимо и достаточно для того, чтобы для оператора U имела место теория Рисса — Шаудера в пространстве Банаха.*

Сформулируем теперь теорему С. Г. Михлина [3], который обобщил для любых линейных операторов некоторые предложения Ф. Нетера, относящиеся к теории одномерных сингулярных интегральных уравнений [3,5].

Говорят, что линейный оператор A допускает регуляризацию, если существует линейный оператор M такой, что $MA = E + T$, где E — тождественный оператор.

Теорема С. Г. Михлина. *Если оператор A допускает регуляризацию, то:*

α) уравнение $A\varphi = 0$ имеет конечное число решений;

β) оператор A нормально разрешим;

γ) при условии (дополнительно), что уравнение $A^*\psi = 0$ имеет конечное число решений, разность между числом решений уравнений $A\varphi = 0$ и числом решений $A^*\psi = 0$ не меняется от прибавления к A вполне непрерывного оператора.

В предлагаемой работе устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых оператор A удовлетворяет свойствам α) и β).

§ 2. Лемма 1. *Если оператор A нормально разрешим, то образы операторов A и AA^*, а также A^* и A^*A совпадают.*

Пусть оператор A нормально разрешим, L_A и L_A^* суть образы операторов A и A^*. Очевидно, $L_{AA^*} \subseteq L_A$. С другой стороны, если $f \in L_A$, то существует решение φ_1 уравнения $f = A\varphi$, ортогональное к подпространству решений уравнения $A\varphi = 0$; но тогда, вследствие нормальной разрешимости A^*, вытекающей по теореме Хаусдорфа (4) из нормальной разрешимости A, уравнение $\varphi_1 = A^*\varphi$ имеет решение φ_2. Отсюда $f = AA^*\varphi_2$ и $f \in L_{AA^*}$. Этим доказано, что L_A и L_{AA^*} совпадают. С другой стороны, из нормальной разрешимости A следует нормальная разрешимость A^*; тогда, рассуждая аналогично, получим, что $L_{A^*} = L_{AA^*}$.

Следствие 1. Из нормальной разрешимости оператора A вытекает нормальная разрешимость операторов AA^* и A^*A.

Теорема 1. *Следующие предложения эквивалентны*:

1. *Для линейного оператора A имеют место утверждения α) и β).*

2. *Оператор A допускает регуляризацию.*

3. *Оператор A^*A удовлетворяет условию N.*

Свойство 1 влечет за собой свойство 3. Действительно, пусть для оператора A имеет место свойство 1, тогда уравнение $A^*A\varphi = 0$ имеет конечное число решений, так как оно эквивалентно уравнению $A\varphi = 0$ ((3), § 6, теорема 2). Оператор нормально разрешим (следствие 1) и самосопряженный, следовательно, по теореме С. М. Никольского, оператор A^*A удовлетворяет условию N.

Свойство 3 влечет за собой свойство 2. Пусть $A^*A = B + T$, тогда регуляризирующим оператором для A является оператор $B^{-1}A^*$: $(B^{-1}A^*)\,A = E + T$.

Из свойства 2 следует свойство 1. По теореме С. Г. Михлина, если оператор допускает регуляризацию, то он удовлетворяет утверждениям α) и β).

Теорема 2. *Следующие предложения эквивалентны:*

1. *Для линейных операторов A и A^* имеют место утверждения α) и β).*

2. *Один из операторов A или A^* допускает эквивалентную регуляризацию*.*

Из свойства 1 следует свойство 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — ортогональная нормированная система решений уравнения $A\varphi = 0$; $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$ — ортогональная нормированная система решений уравнения $A^*\psi = 0$. Обозначим $k - k' = \varkappa$ и пусть $\varkappa \geqslant 0$.

* Говорят, что оператор A допускает эквивалентную регуляризацию, если существует такой линейный оператор M, что $MA = E + T$, где T — вполне непрерывный оператор, и уравнения $NA\varphi = Nf$, $A\varphi = f$ эквивалентны при любом f.

Рассмотрим оператор $P\varphi = A^*\varphi + \sum_{i=1}^{k'} (\varphi, \psi_i)\varphi_i$. Уравнение $P\varphi = 0$ имеет единственное нулевое решение.

Действительно, во-первых, пусть φ_0 есть решение уравнения $P\varphi_0 = 0$. Умножим обе части скалярно на φ_j $(j = 1, 2, \ldots, k')$, тогда:

$$(P\varphi_0, \varphi_j) = (A^*\varphi_0, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{k'} (\varphi_0, \psi_i)(\varphi_i, \varphi_j) = (\varphi_0, \psi_j);$$

замечая, что $P\varphi_0 = 0$, получим $(\varphi_0, \psi_j) = 0$ и, значит, $A^*\varphi_0 = 0$.

Следовательно, если φ_0 есть решение уравнения $P\varphi = 0$, то оно является решением уравнения $A^*\varphi = 0$. Значит, все решения уравнения $P\varphi = 0$ являются решениями уравнения $A^*\psi = 0$, т. е. φ_0 есть линейная комбинация решений ψ_i уравнения $A^*\psi = 0$.

Во-вторых, мы видим, что $(\varphi_0, \psi_j) = 0$ для всех ψ_j, откуда следует, что $\varphi_0 = 0$.

Оператор $PA\varphi = A^*A\varphi = \sum_{i=1}^{k'} (A\varphi, \psi_i)\varphi_i = A^*A\varphi$.

Оператор A^*A удовлетворяет условию N, т. е. A^*A представим в виде суммы двух операторов $A^*A = B + T$, из которых B — обратимый и T — вполне непрерывный (теорема 1).

Оператор A допускает эквивалентную регуляризацию, так как оператор $B^{-1}P$ является эквивалентно регуляризирующим для A^* ([3], § 6, лемма 1).

Этим и завершается доказательство теоремы. В случае $\varkappa < 0$ можно аналогичным образом показать, что оператор A^* допускает эквивалентную регуляризацию.

Из свойства 2 следует свойство 1. В самом деле, если оператор A допускает эквивалентную регуляризацию, то, как показал С. Г. Михлин, для этого оператора имеют место α) и β) и число решений однородного уравнения $A^*\psi = 0$ меньше числа решений уравнения $A\varphi = 0$. Учитывая, что оператор A нормально разрешим вместе с оператором A^*, мы приходим к выводу, что для обоих операторов A и A^* имеют место первые две теоремы Нетера.

Следствие. Если для линейного оператора A имеет место хоть одно из утверждений теоремы 2, то для него имеет место также свойство γ.

Действительно, если для A имеет место свойство 2 теоремы 2, то один из операторов A или A^* допускает эквивалентную регуляризацию и уравнения $A\varphi = 0$ и $A^*\psi = 0$ имеют конечное число решений, значит, к A применима теорема 3 § 7 ([3]).

Замечание. Существует оператор A_1, удовлетворяющий свойствам α) и β) и такой, что уравнение $A_1^*\psi = 0$ имеет бесконечное число решений.

Пусть для простоты H сепарабельно и $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — его ортогональный нормированный базис. Определим оператор A_1 следующим образом:

$$A_1\varphi = A_1\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, r_i)\, r_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, r_i)\, r_{2i},$$

$$A_1^*\psi = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi, r_{2i})\, r_i.$$

Нетрудно видеть, что для A_1 имеют место утверждения α) и β). Уравнение же $A_1^* \psi = 0$ имеет бесконечное число решений, так как его решениями являются элементы r_{2i-1}.

Поступило
13 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Рисс, Усп. матем. наук, в. 1 (1936). [2] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, № 3, 147 (1943). [3] С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 3, в. 3, 30 (1948). [4] Ф. Хаусдорф, Теория множеств (дополнение), 1937, стр. 266—290. [5] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.