Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

А. В. БАТЫРЕВ

О ПРИЗНАКАХ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ И ГИПЕРТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. М. Келдышем 4 XI 1950)

1. Теория приближения аналитических функций полиномами может быть с некоторым успехом применена к нахождению достаточных признаков трансцендентности и гипертрансцендентности аналитических функций.

Как известно, аналитическую функцию $w = f(z)$ называют трансцендентной, если она не удовлетворяет ни одному алгебраическому уравнению $p_0(z)w^n + p_1(z)w^{n-1} + \cdots + p_n(z) = 0$, коэффициенты которого $p_k(z)$ являются полиномами от z.

Аналитическую функцию $w = f(z)$ называют гипертрансцендентной, если она не удовлетворяет ни одному алгебраическому дифференциальному уравнению $F(z, w, w', \ldots, w^{(n)})$, где F является полиномом от своих аргументов.

Теорема 1. *Если w — алгебраическая функция, определяемая неприводимым уравнением $f(z, w) = 0$ степени m, то для любой ее ветви, аналитической в замкнутой области $\overline{D}$ с внешним конформным радиусом r,*

$$\max_{z \in \overline{D}} |w - p_n(z)| > C|a_n|^m r^{mn}, \tag{1}$$

где $p_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, а C — постоянная величина, зависящая от $f(z, w)$.

Для доказательства заменим w в функции $f(z, w)$ любым полиномом $p(z)$; тогда

$$f(z, w) - f(z, p) = (w - p)Q(z, w, p),$$

где $Q(z, w, p)$ — полином от своих аргументов.

При достаточной близости полинома $p(z)$ к w в рассматриваемой области $\overline{D}$ $\max\limits_{z \in \overline{D}} |Q(z, w, p)|$ сколь угодно мало отличается от $\max\limits_{z \in \overline{D}} |\partial f/\partial w|$. Отсюда следует, что существует такая постоянная $A > 0$, определяемая уравнением $f(z, w) = 0$, для которой справедливо неравенство

$$|w - p(z)| > A|f(z, p)| \quad \text{или} \quad \max_{z \in \overline{D}} |w - p(z)| > A \max_{z \in \overline{D}} |f(z, p)|. \tag{2}$$

Так как $f(z, p)$ является полиномом относительно z, то для $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z, p)|$ можно указать нижнюю границу.

Известно [1], что для полинома Чебышева $T_n(z)$, наименее отклоняющегося от нуля в $\overline{D}$, справедлива оценка

$$\max_{z \in \overline{D}} |T_n(z)| \geqslant Br^n,$$

где B — постоянная величина, определяемая $\overline{D}$.

Поэтому, так как степень полинома $f(z, p_n)$ при достаточно больших n будет $mn + m_0$, где m_0 — степень полинома, стоящего коэффициентом при w^m, и коэффициент при старшей степени z в этом полиноме равен a_n^m, имеем

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z, p_n)| \geqslant B |a_n|^m r^{mn+m_0}.$$

Сравнивая это с неравенством (2) и обозначая $ABr^{m_0} = C$, получаем доказательство теоремы.

Для упрощения всегда можно считать, что $\overline{D}$ совпадает с кругом $|z| \leqslant 1$; тогда $r = 1$ и

$$\max_{|z| \leqslant 1} |w - p_n(z)| > C |a_n|^m.$$

Обращая доказанную теорему, получим достаточный признак трансцендентности аналитической функции.

Если функция $f(z)$ является аналитической при $|z| \leqslant 1$ и при любых m и C можно найти такой полином $p_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ степени n, зависящей от m и C, что

$$\max_{|z| \leqslant 1} |f(z) - p_n(z)| < C |a_n|^m,$$

то $f(z)$ является трансцендентной.

2. Указанным приемом можно воспользоваться для обнаружения алгебраической независимости между аналитическими функциями.

Теорема 2. *Если между двумя функциями w_1 и w_2, аналитическими в замкнутой области $\overline{D}$ с внешним конформным радиусом r, существует алгебраическая зависимость с коэффициентами в виде полиномов от z, то имеет место неравенство*

$$\sqrt{\max_{z \in \overline{D}} |w_1 - p_\mu^{(1)}|^2 + \max_{z \in \overline{D}} |w_2 - p_\nu^{(2)}|^2} > C |a_\mu^{(1)}|^m |a_\nu^{(2)}|^n r^{\mu m + \nu n}, \qquad (3)$$

где $p_\mu^{(1)} = a_\mu^{(1)} z^\mu + \cdots + a_0^{(1)}$; $p_\nu^{(2)} = a_\nu^{(2)} z^\nu + \cdots + a_0^{(2)}$; m и n — показатели степени у w_1 и w_2 в члене наивысшего измерения; C — постоянная величина, зависящая от уравнения, связывающего w_1 и w_2.

Доказательство проводится аналогично и основывается на формуле

$$f(z, w_1, w_2) - f(z, p_\mu^{(1)}, p_\nu^{(2)}) = (w_1 - p_\mu^{(1)}) Q_1 + (w_2 - p_\nu^{(2)}) Q_2,$$

где Q_1 и Q_2 — полиномы от своих аргументов z, $p_\mu^{(1)}$, $p_\nu^{(2)}$, w_1, w_2.

Обозначая верхние грани $|Q_1|$ и $|Q_2|$ в $\overline{D}$ через M_1 и M_2, имеем

$$M_1 \max_{z \in \overline{D}} |w_1 - p_\mu^{(1)}| + M_2 \max_{z \in \overline{D}} |w_2 - p_\nu^{(2)}| > \max_{z \in \overline{D}} |f(z, p_\mu^{(1)}, p_\nu^{(2)})|. \qquad (4)$$

$f(z,\ p_\mu^{(1)},\ p_\nu^{(2)})$ представляет собой полином относительно z, поэтому из аналогичных соображений имеем

$$\max_{z\in\overline{D}}|f(z,\ p_\mu^{(1)},\ p_\nu^{(2)})| > A\,|a_\mu^{(1)}|^m\,|a_\nu^{(2)}|^n\, r^{\mu m+\nu n+s_\bullet}.$$

Обозначая $Ar^{s_\bullet}/\sqrt{M_1^2+M_2^2}=C$ и применяя к левой части (4) неравенство Буняковского, получим доказательство теоремы.

Доказанная теорема легко обобщается на случай нескольких функций.

Теорема 3. *Если между $n+1$ функцией $w_0, w_1,\ldots, w_n$, которые являются аналитическими в замкнутой области $\overline{D}$ с внешним конформным радиусом r, существует алгебраическая зависимость с коэффициентами в виде полиномов от z, то имеет место неравенство*

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\max_{z\in\overline{D}}|w_k-p_{\nu_k}^{(k)}|^2} > Cr^{\sum\limits_{k=0}^{n}\nu_k m_k}\prod_{k=0}^{n}|a_{\nu_k}^{(k)}|^{m_k},$$

где $p_{\nu_k}^{(k)}=a_{\nu_k}^{(k)}z^{\nu_k}+\cdots+a_0^{(k)}$; $m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_n$ — показатели степени у члена наивысшего измерения $w_0^{m_0}, w_1^{m_1}\ldots w_n^{m_n}$; C — постоянная величина, зависящая от уравнения, связывающего функции $w_1, w_2,\ldots, w_n$.

Обращая доказанные теоремы, получим достаточные условия для отсутствия алгебраической зависимости между данными аналитическими функциями.

3. Если за функции w_k взять последовательные производные некоторой аналитической функции w до порядка n, то из теоремы 3 получим необходимое условие того, что w удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению порядка n.

Для упрощения этого условия возьмем за область $\overline{D}$ круг $|z|<1$ и полиномы, апроксимирующие $w^{(k)}$, подберем специальным образом. Пусть полином $p_\nu^{(n)}(z)=a_\nu z^\nu+\ldots+a_0$ апроксимирует производную $w^{(n)}$. Производную $w^{(n-1)}$ будем апроксимировать полиномом $p_{\nu+1}^{(n-1)}(z)=\int p_\nu^{(n)}(z)\,dz$, который удовлетворяет условию $p_{\nu+1}^{(n-1)}(0)=w^{(n-1)}(0)$, и т. д. Тогда, очевидно,

$$\max_{|z|\leqslant 1}|w^{(k)}-p_{\nu+n-k}^{(k)}|\leqslant\max_{|z|\leqslant 1}|w^{(n)}-p_\nu^{(n)}|.$$

Применяя теорему 3 к данному случаю, можно сформулировать теорему 4.

Теорема 4. *Если аналитическая в области $|z|\leqslant 1$ функция w удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению порядка n, то имеет место неравенство*

$$\max_{|z|\leqslant 1}|w^{(n)}-p_\nu^{(n)}| > \frac{C}{\sqrt{n+1}}\prod_{k=0}^{n}\left|\frac{a_\nu\,\nu!}{(\nu+k)!}\right|^{m_k},$$

где $p_\nu^{(n)}=a_\nu z^\nu+\cdots+a_0$ — полином, апроксимирующий $w^{(n)}$; $m_0, m_1,\ldots,m_n$ — показатели степени у члена наивысшего измерения.

Обращая теорему 4, получим достаточное условие гипертрансцендентности функции w.

Если при любых n, m и C можно найти такой полином $p_\nu^{(n)} = a_\nu z^\nu + \cdots + a_0$, что для аналитической при $|z| \leqslant 1$ функции w имеет место неравенство

$$\max_{|z| \leqslant 1} |w^{(n)} - p_\nu^{(n)}| < \frac{C}{\sqrt{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \left| \frac{a_\nu \nu!}{(\nu+k)!} \right|^m,$$

то функция w будет гипертрансцендентной.

Пользуясь этим признаком, можно эффективно строить примеры гипертрансцендентных функций.

Например, функция $w = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, где $|b_{n+1}| < |b_n|^{n^2}/a(n+1)!$ и $a > 1$, будет гипертрансцендентной.

Поступило
8 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Faber, Journ. f. reine u. angew. Math., **150**, 88 (1920).