Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. Ю. ПИЛЬЧАК

О ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 X 1950)

1. В настоящей заметке дается новое решение проблемы разрешимости для некоторых исчислений логики предложений, не содержащих закона исключенного третьего. Первые исчисления, лишенные этого закона, были предложены А. Н. Колмогоровым [1] и В. И. Гливенко [3,4]. Исчисление Гейтинга [5], опубликованное позднее, эквивалентно исчислению Гливенко. Содержательная характеристика формул, доказуемых в исчислениях Гливенко и Гейтинга, была дана Колмогоровым [2], интерпретировавшим последнее исчисление в виде исчисления задач. Предложенные Генценом [6] или Яськовским [7] алгоритмические решения вопроса о доказуемости или недоказуемости в исчислении Гейтинга решают вопрос чисто теоретически и лишены практического смысла в силу громоздкости.

2. Дальнейшее изложение идет в терминах исчисления Гливенко (Γ-исчисления). Малыми латинскими буквами $p, q, r, \ldots$ обозначаются элементарные формулы (э. ф.) Γ-исчисления. Для обозначения логических операций употребляются знаки: $\supset$ (импликация), $\wedge$ (коньюнкция), $\vee$ (дизъюнкция) и $\neg$ (отрицание). Произвольные формулы обозначаются жирными латинскими буквами $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$; $\prod_{i=1}^{l} \mathbf{A}_i$ есть сокращенная запись формулы $\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_l$; $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ — формулы $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \supset \mathbf{A})$. Аксиомы Γ-исчисления см. [3,4].

3. Определение 1. Формула $\mathbf{A}$ называется регулярной (р. ф.), если она имеет вид (порядок посылок не играет роли)

$$\prod_{i=1}^{k} (\mathbf{B}_i \supset p_i) \wedge \prod_{i=1}^{l} t_i \wedge \prod_{i=1}^{m} \neg q_i \wedge \prod_{i=1}^{n} (r_i \supset \mathbf{D}_i) \supset s, \quad k + l + m + n \neq 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{B}_i$ есть либо $\neg x_i$, либо $x_i \supset y_i$, а $\mathbf{D}_i$ — либо x_i, либо $\neg x_i$, либо $x_i \vee y_i$, либо $x_i \supset y_i$.

C_k — класс регулярных формул, содержащих k посылок вида $\mathbf{B}_i \supset p_i$.

Определение 2. Регулярная формула (1) называется нормальной (н. р. ф.), если посылки-буквы t_i этой формулы не встречаются в ее посылках-импликациях ($\mathbf{B}_j \supset p_j$ и $r_j \supset \mathbf{D}_j$).

Определение 3. Формулы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются дедуктивно равными (д. р.), если для Γ-исчисления доказуемы правила $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ и $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ *.

* $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ обозначает правило, позволяющее перейти от доказанной формулы $\mathbf{A}$ к $\mathbf{B}$, которая в силу этого правила также считается доказанной.

Очевидно, что если **A** и **B** д. р., то они либо обе доказуемы, либо обе недоказуемы в *Г*-исчислении.

4. Теорема 1. *Для каждой формулы логики предложений существует дедуктивно равная ей регулярная формула.*

Доказательство теоремы 1 содержит алгоритм приведения данной формулы **A** к регулярному виду $\mathbf{A}^*$. Если s — э. ф., не встречающаяся в **A**, то **A** д. р. формуле

$$(\mathbf{A} \supset s) \wedge (s \supset \mathbf{A}) \supset s. \tag{2}$$

Если **A** содержит $n > 1$ знаков логических операций и является, например, формулой вида $\mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_2$, то (2) д. р. формуле

$$(\mathbf{F}_1 \supset p_1) \wedge (p_1 \supset \mathbf{F}) \wedge (\mathbf{F}_2 \supset p_2) \wedge (p_2 \supset \mathbf{F}_2) \wedge (p_1 \wedge p_2 \supset s) \wedge (s \supset p_1 \wedge p_2) \supset s, \tag{3}$$

где p_1 и p_2 — э. ф., не встречающиеся в (2). Аналогично, для **A** вида $\mathbf{F}_1 \supset \mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1 \vee \mathbf{F}_2$, $\neg \mathbf{F}_1$. Повторив описанный процесс $n-1$ раз, придем к формуле вида $\prod\limits_i (\mathbf{B}_i \supset p_i) \wedge \prod\limits_i (p_i \supset \mathbf{B}_i) \supset s$, где $\mathbf{B}_i$ содержит не более одного знака логической операции. Эта формула нерегулярна только в том случае, когда она содержит посылки вида $x_i \wedge y_i \supset p_i$, $p_i \supset x_i \wedge y_i$ или $x_i \vee y_i \supset p_i$, которые можно, однако, заменить эквивалентными * посылками $x_i \supset (y_i \supset p_i)$, $(p_i \supset x_i) \wedge (p_i \supset y_i)$ или $(x_i \supset p_i) \wedge (y_i \supset p_i)$ соответственно. Полученная в результате такого преобразования (нормальная) регулярная формула $\mathbf{A}^*$ д. р. **A**.

5. Теорема 2. *Для каждой регулярной формулы $\mathbf{A} \in C_k$ можно построить эквивалентную ей формулу $\prod \mathbf{A}_i$, где каждая $\mathbf{A}_i$ — нормальная регулярная формула класса $k_i \leqslant k$.*

При исключении посылок-букв из посылок-импликаций формулы **A** используются формулы

$$\begin{array}{ll}
t \wedge ((t \supset x) \supset y) \sim t \wedge (x \supset y); & t \wedge (x \supset \neg t) \sim t \wedge \neg x; \\
t \wedge ((x \supset t) \supset y) \sim t \wedge y; & t \wedge (x \supset (y \supset t)) \sim t; \\
t \wedge (x \supset t) \sim t; & t \wedge (x \supset (t \supset y)) \sim t \wedge (x \supset y); \\
t \wedge (\neg t \supset x) \sim t; & t \wedge (x \supset t \vee y) \sim t; \\
t \wedge (t \supset x) \sim t \wedge x; & t \wedge (x \supset y \vee t) \sim t.
\end{array}$$

Кроме того, при приведении **A** к виду $\prod\limits_i \mathbf{A}_i$ используются формулы

$$x \wedge (y \vee z) \sim (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{и} \quad (x \vee y \supset s) \sim (x \supset s) \wedge (y \supset s).$$

6. Так как для каждой формулы **A** можно построить д. р. ей регулярную, то проблему разрешимости достаточно решить для р. ф. Для решения вопроса о доказуемости или недоказуемости (в *Г*-исчислении) р. ф. $\mathbf{A} \in C_k$ предлагается следующий алгоритм. Построим $\prod\limits_i \mathbf{A}_i$, эквивалентную **A** (все $\mathbf{A}_i$ — н. р. ф., и $\mathbf{A}_i \in C_{k_i}$, где $k_i \leqslant k$). **A** доказуема тогда и только тогда, когда доказуемы все $\mathbf{A}_i$. Если $k_i = 0$, то $\mathbf{A}_i$ доказуема в *Г*-исчислении тогда и только тогда, когда она доказуема в классической логике предложений, т. е. когда $\mathbf{A}_i$ есть либо $x_i \wedge \neg x_i \wedge \mathbf{F}_i \supset s$, либо $s \wedge \mathbf{F}_i \supset s$.

Пусть $k_i > 0$. Тогда $\mathbf{A}_i$ имеет вид $\prod\limits_{j=1}^{k_i} (\mathbf{B}_{ij} \supset p_{ij}) \wedge \mathbf{F}_i \supset s$, где $\mathbf{B}_{ij}$ есть

---

* Две формулы **A** и **B** называются эквивалентными (экв.), если в *Г*-исчислении доказуема формула $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

либо $\neg x_{ij}$, либо $x_{ij} \supset y_{ij}$. Рассмотрим k_i формул

$$\prod_{h=1}^{k_i} (\mathbf{B}_{ih} \supset p_{ih}) \wedge \mathbf{F}_i \supset \mathbf{B}_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, k_i. \tag{4, j}$$

Вопрос о доказуемости $\mathbf{A}_i$ сводится к вопросу о доказуемости формул $(4, j)$ и р. ф., принадлежащих более низкому классу, чем $\mathbf{A}_i$.

а) Если существует j такое, что $(4, j)$ доказуема в Γ-исчислении, то $\mathbf{A}_i$ эквивалентна р. ф. $p_{ij} \wedge \prod_{h \neq j}^{k_i} (\mathbf{B}_{ih} \supset p_{ih}) \wedge \mathbf{F}_i \supset s$ класса $C_{k_i - 1}$.

б) Если ни одна из $(4, j)$ не доказуема, то и $\mathbf{A}_i$ недоказуема в Γ-исчислении (напомним, что все $\mathbf{A}_i$ н. р. ф.).

Вопрос же о доказуемости $(4, j)$ сводится к вопросу о доказуемости р. ф. более низкого класса: если $\mathbf{B}_{ij}$ есть $\neg x_{ij}$, то $(4, j)$ доказуема в Γ-исчислении тогда и только тогда, когда она доказуема в классической логике предложений; если же $\mathbf{B}_{ij}$ есть $x_{ij} \supset y_{ij}$, то $(4, j)$ эквивалентна р. ф. $x_{ij} \wedge (y_{ij} \supset p_{ij}) \wedge \prod_{h \neq j}^{k_i} (\mathbf{B}_{ih} \supset p_{ih}) \wedge \mathbf{F}_i \supset y_{ij}$ класса $C_{k_i - 1}$.

Итак, вопрос о доказуемости в Γ-исчислении произвольной формулы $\mathbf{A}$ логики предложений сводится к вопросу о доказуемости некоторой р. ф. Проблема разрешимости для р. ф. класса C_k при $k > 0$ сводится к проблеме разрешимости для р. ф. класса C_{k-1}. Вопрос же о доказуемости р. ф. класса C_0 решается по виду соответствующей ей конъюнкции н. р. ф.

Ясно, что все изложенные результаты относятся к любому исчислению, эквивалентному Γ-исчислению, т. е. к любому исчислению задач.

7. Примеры.

1) $\mathbf{A} = (p \supset q \vee s) \supset (p \supset q) \vee (p \supset s)$.

Приведем $\mathbf{A}$ к регулярной форме:

$$(p \supset q) \sim r_1) \wedge ((p \supset s) \sim r_2) \wedge (r_1 \vee r_2 \sim r_3) \wedge (p \supset q \vee s) \supset r_3;$$

$$\mathbf{A}^* = (\underline{(p \supset q) \supset r_1}) \wedge (\underline{(p \supset s) \supset r_2}) \wedge (r_1 \supset (p \supset q)) \wedge (r_2 \supset (p \supset s)) \wedge$$
$$(r_3 \supset r_1 \vee r_2) \wedge (r_1 \supset r_3) \wedge (r_2 \supset r_3) \wedge (p \supset q \vee s) \supset r_3; \quad \mathbf{A}^* \in C_2.$$

$$(4{,}1) \text{ экв. } [p \wedge ((p \supset q) \supset r_1) \wedge ((p \supset s) \supset r_2) \wedge (r_1 \supset (p \supset q)) \wedge$$
$$(r_2 \supset (p \supset s)) \wedge (r_3 \supset r_1 \vee r_2) \wedge$$
$$(r_1 \supset r_3) \wedge (r_2 \supset r_3) \wedge (p \supset q \vee s) \supset q].$$

Приведем (4,1) к конъюнкции н. р. ф.

$$(4.1) \text{ экв. } [p \wedge (q \supset r_1) \wedge (s \supset r_2) \wedge (r_1 \supset q) \wedge (r_2 \supset s) \wedge$$
$$(r_3 \supset r_1 \vee r_2) \wedge (r_1 \supset r_3) \wedge (r_2 \supset r_3) \wedge (q \vee s) \supset q];$$
$$\text{экв. } \{[p \wedge (q \supset r_1) \wedge (s \supset r_2) \wedge (r_1 \supset q) \wedge (r_2 \supset s) \wedge (r_3 \supset r_1 \vee r_2) \wedge$$
$$(r_1 \supset r_3) \wedge (r_2 \supset r_3) \wedge q \supset q] \wedge$$
$$[p \wedge (q \supset r_1) \wedge (s \supset r_2) \wedge (r_1 \supset q) \wedge (r_2 \supset s) \wedge (r_3 \supset r_1 \vee r_2) \wedge$$
$$(r_1 \supset r_3) \wedge (r_2 \supset r_3) \wedge s \supset q]\};$$

экв. $[p \wedge (q \supset r_1) \wedge (s \supset r_2) \wedge (r_1 \supset q) \wedge (r_2 \supset s) \wedge (r_3 \supset r_1 \vee r_2) \wedge$

$(r_1 \supset r_3) \wedge (r_2 \supset r_3) \wedge s \supset q]$;

экв. $[p \wedge (q \supset r_1) \wedge r_2 \wedge (r_1 \supset q) \wedge (r_1 \supset r_3) \wedge r_3 \wedge s \supset q]$;

экв. $[p \wedge (q \supset r_1) \wedge r_2 \wedge (r_1 \supset q) \wedge r_3 \wedge s \supset q]$.

(4,1) недоказуема в Γ-исчислении. Аналогично доказывается недоказуемость (4,2). Следовательно, $\mathbf{A}^*$ (вместе с ней и д. р. ей $\mathbf{A}$) недоказуема в Γ-исчислении.

2) $\mathbf{A} = [((p \supset q) \supset p) \supset p]$; $\mathbf{A} \in C_1$.

(4,1) экв. $p \wedge ((p \supset q) \supset p) \supset q$ экв. $(p \supset q)$—недоказуема, следовательно, и $\mathbf{A}$ недоказуема в Γ-исчислении.

3) $\mathbf{A} = [p \wedge ((p \supset q) \supset s) \supset (q \supset s)]$; $\mathbf{A}^* = [p \wedge q \wedge ((p \supset q) \supset s) \supset s]$; $\mathbf{A}^* \in C_1$.

$\mathbf{A}^*$ экв. $p \wedge q \wedge (q \supset s)$ экв. $p \wedge q \wedge s \supset s$. $\mathbf{A}^*$ доказуема в Γ-исчислении, следовательно, и $\mathbf{A}$ доказуема в этом исчислении.

Поступило
14 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Матем. сборн., 32 : 4 (1925). [2] А. Н. Колмогоров, Math. Zs., 35, 38 (1932). [3] В. И. Гливенко, Bull., Ak. Belg, (5) 14 (1928). [4] В. И. Гливенко, ibid., (5) 15 (1929). [5] A. Heyting, Sitz.-Ber. Preuss. Ak. Wiss., Phys.-Math. Kl., 42, 57, 158 (1930). [6] G. Gentzen, Math. Zs., 39, 176, 405 (1935). [7] S. Jaskowski, Congress international de Philosophy, Actes VI philos. d. mathem., 58 (1936).