Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

МАТЕМАТИКА

В. Б. ЛИДСКИЙ

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 X 1950)

1. Пусть A и B — две произвольные симметрические матрицы с заданными собственными значениями: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ и $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$.

Поставим вопрос: каковы могут быть собственные значения у их суммы. Точнее указанный вопрос можно формулировать следующим образом: каковы системы собственных значений у матриц

$$S = A + B = U^{-1}\Lambda U + V^{-1}\mathrm{M}V, \tag{1}$$

где Λ и M — заданные диагональные матрицы с действительными элементами $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ и $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$, а U и V пробегают независимо друг от друга группу ортогональных матриц. В случае, если A и B — положительно определенные матрицы, интересен аналогичный вопрос о собственных значениях произведения AB. Ответ на второй вопрос был получен И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [1]. Ниже приводится элементарное исследование указанных вопросов. Рассмотрим сперва задачу о собственных значениях суммы.

2. Будем системе собственных значений каждой из матриц S: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$ ставить в соответствие точку в вспомогательном n-мерном пространстве $R^{(n)}$ с координатами $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Полученное таким образом множество обозначим M.

Рассмотрим $2(n!)$ точек в $R^{(n)}$:

$$\bar{a}_j\,(\lambda_1 + \mu_1', \quad \lambda_2 + \mu_2', \ldots, \lambda_n + \mu_n'), \quad j = 1, 2, \ldots, n!,$$

$$\bar{b}_i\,(\mu_1 + \lambda_1', \quad \mu_2 + \lambda_2', \ldots, \mu_n + \lambda_n'), \quad i = 1, 2, \ldots, n!,$$

где $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_n'$ и $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ — некоторые перестановки из собственных значений B и A, причем берутся все перестановки.

Обозначим через K_a замкнутую выпуклую оболочку, натянутую на $\bar{a}_j$, через K_b — на $\bar{b}_i$. Пусть далее, L есть пересечение K_a и K_b. Относительно собственных значений матриц S имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Множество M, состоящее из точек с координатами $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$ — собственные значения матриц S, содержится в L.*

Наметим доказательство, которое проводится по индукции в предположении, что для матриц порядка $k < n$ теорема справедлива. Для

$n=2$ справедливость теоремы проверяется непосредственно. Очевидно, не изменяя задачи, в (1) можно, например, U считать единичной матрицей. Тогда M может рассматриваться как ограниченный и непрерывный образ группы ортогональных матриц, которую пробегает V. В силу компактности последней M содержит все свои граничные точки. Заметим, что если V — ортогональная матрица, близкая к ортогональной матрице V_0 по-элементно, то

$$\tilde{V} = V_0^{-1} \cdot V = \sum_0^\infty \frac{\alpha^k P^k}{k!}, \tag{2}$$

где αP — кососимметрическая матрица, $\frac{n(n-1)}{2}$ независимых элементов которой $\alpha\delta_{ij} = -\alpha\delta_{ji}$ могут быть рассмотрены как локальные координаты окрестности V_0. Легко показать, что в окрестности тех V, которым соответствуют матрицы S, не имеющие кратных собственных значений, наше отображение дифференцируемо в том смысле, что существуют полные дифференциалы собственных значений σ_k как функций локальных координат. Вычисления приводят к следующим выражениям для дифференциалов собственных значений матрицы S:

$$d\sigma_k = 2\sum_{i>j} \gamma_{ij} w_{ki} w_{kj}, \tag{3}$$

где $\gamma_{ij} = \alpha\delta_{ij}(\lambda_j - \lambda_i)$*, а w_{ki} — компоненты k-го собственного вектора S.

Будем считать для удобства $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$ и $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = 0$. Этого всегда можно добиться прибавлением скалярных матриц, не влияющих на существо задачи. В таком случае для всех V мы будем иметь: $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = \operatorname{sp} S = \operatorname{sp} A + \operatorname{sp} B = 0$. Стало быть, M расположится на $(n-1)$-мерной гиперплоскости $R^{(n)}$: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Будем разыскивать граничные точки множества M. Условимся точки M, не содержащие равных координат (в их окрестности отображение дифференцируемо), называть некратными, в противном случае — кратными. Очевидно, некратная точка может быть граничной только тогда, если ранг соответствующей матрицы преобразования (3) строго меньше $(n-1)$. Можно доказать, что если r — ранг матрицы преобразования (3) и $r < n-1$, то соответствующая матрица S распадается в прямую сумму матриц порядков r и $(n-r)$. В силу индуктивного предположения отвечающая ей точка входит в L.

Покажем, что L содержит вообще все некратные точки M. Для этого заметим, что имеет место следующий легко доказуемый факт: если точка $\bar{o}(0, 0, \ldots, 0)$ (начало координат $R^{(n)}$), соответствующая $S=0$, входит в M, то она принадлежит L. Заметим далее, что, ввиду выпуклости L, всякая прямая плоскости $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ либо не пересекает L, либо имеет с L общий отрезок $[\bar{a}, \bar{b}]$. Пусть теперь нашлась некратная точка $\bar{\sigma}$ такая, что $\bar{\sigma} \in M$ и $\bar{\sigma} \notin L$. Проведем через нее прямую из начала координат. Так как $\bar{\sigma}$ входит в M с полной окрестностью, то на прямой найдется интервал, принадлежащий M и содержащий $\bar{\sigma}$. Легко видеть, что, каково бы ни было расположение точек $\bar{o}, \bar{a}, \bar{b}$ на прямой, у интервала не найдется либо правой, либо

* Мы предполагаем $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$. От этого условия впоследствии легко освободиться.

левой граничной точки, что противоречит замкнутости M. Так как в любой окрестности кратной точки всегда найдется некратная точка и L замкнуто, то $M \subset L$.

Ниже приводится один важный частный случай, когда $M = L$. Сформулируем одно нужное для дальнейшего предложение, имеющее и самостоятельное значение.

Теорема 2. *Для того чтобы у S при любых U и V не появлялись кратные собственные значения, достаточно выполнение одного из следующих неравенств:*

$$|\mu_k - \mu_l| < |\lambda_i - \lambda_j|, \quad i \neq j, \tag{4'}$$

либо

$$|\lambda_i - \lambda_j| < |\mu_k - \mu_l|, \quad k \neq l. \tag{4''}$$

Доказательство. Достаточность условия (4) есть следствие теоремы 1. В самом деле, в этом случае, например, при (4′) K_a не пересекает ни одну из гиперплоскостей $R^{(n)}$, $x_i = x_j$, $i \neq j$. Заметим, что условие (4) является в известном смысле необходимым для теоремы 2. В самом деле, если кратные собственные значения не появляются при любых U и V, то сохраняется порядок следования собственных значений матрицы S по величине, именно, большее собственное значение непрерывно переходит в большее. В предположении, что ни одно из условий (4) не выполнено, нетрудно подобрать такие V_1 и V_2, чтобы при переходе от V_1 к V_2 нарушился порядок следования собственных значений.

Теорема 3. *Если выполняется одно из условий* (4), *то*

$$M = L. \tag{5}$$

Доказательство проводится по индукции. Для $n = 2$ формула (5) проверяется непосредственно. Заметим, что в силу теоремы 2 отображение всюду дифференцируемо. Для определенности будем считать выполненным (4′), тогда легко видеть, что $L = K_a$. В силу ранее сделанного замечания граничными точками M могут служить лишь те, которые соответствуют ящичным S. Используя индуктивное предположение, легко убедиться, что точки, которым соответствуют ящичные S, расположены на $(n-2)$-мерных гранях и диагональных гиперплоскостях K_a, последние в силу того же допущения целиком состоят из точек M.

Для доказательства теоремы оказывается достаточным проварьировать след одного из ящиков S, сохраняющий свое значение постоянным во всех точках соответствующей грани или диагональной гиперплоскости K_a. Первый дифференциал следа ящика, как это следует из (3), равен 0. Вычисление второго дифференциала следа ящика приводит к следующей квадратичной форме относительно введенных нами локальных координат:

$$d^2\left(\sum_{p=1}^{r} \sigma_p\right) =$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{r} \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\gamma_{pk}^2}{\lambda_k - \lambda_p} + \sum_{l,\, s=r+1}^{n} \sum_{i,\, j=1}^{r} \gamma_{il}\gamma_{js} \sum_{p=1}^{r} \sum_{k=r+1}^{n} \frac{w_{pi}\, w_{pj}\, w_{kl}\, w_{ks}}{\sigma_p - \sigma_k}\right), \tag{6}$$

где положено $\gamma_{ij} = \alpha\delta_{ij}(\lambda_j - \lambda_i)$.

Исследованием матрицы $r(n-r)$-го порядка этой квадратичной формы устанавливается, что форма (6) знакоопределена лишь на гранях K_a. Это и доказывает теорему.

3. В предположении, что A и B — положительно определенные матрицы, вопрос о собственных значениях $AB = P$ решается по аналогии с вышеизложенным. Вычисления приводят к следующим выражениям для дифференциалов логарифмов собственных значений P:

$$d \ln \pi_k = \sum_{i>} \alpha \delta_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} - \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) w_{ki} w_{kj},$$

в полном соответствии с (3). Можно доказать справедливость в этом случае теорем 1, 2 и 3; нужно лишь собственным значениям матрицы P ставить в соответствие точку с координатами $(\ln \pi_1, \ln \pi_2, \ldots, \ln \pi_n)$. Соответствующие изменения следует произвести и при построении K_a и K_b, натягивая выпуклые оболочки на точки

$$\bar{a}_j (\ln \lambda_1 + \ln \mu_1', \quad \ln \lambda_2 + \ln \mu_2', \ldots, \ln \lambda_n + \ln \mu_n'),$$

$$\bar{b}_i (\ln \mu_1 + \ln \lambda_1', \quad \ln \mu_2 + \ln \lambda_2', \ldots, \ln \mu_n + \ln \lambda_n').$$

Отметим также, что все изложенные результаты переносятся на случай эрмитовых матриц.

В заключение приношу благодарность проф. И. М. Гельфанду за помощь и руководство в работе.

Поступило
19 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, 239 (1950).