Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 6

МАТЕМАТИКА

О. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О МЕТОДЕ ФУРЬЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 X 1950)

В моей предыдущей заметке по этому же вопросу были даны достаточные условия, гарантирующие возможность двукратного почленного дифференцирования ряда Фурье. Число требуемых производных от начальных функций примерно вдвое превышало число таковых для задачи Коши для тех же уравнений, зато от контура рассматриваемой области требовалась лишь кусочная гладкость.

В настоящей заметке мы показываем, что если контур области достаточно гладкий, то от начальных функций достаточно требовать то же число производных, что и в задаче Коши. О порядке согласования начальных и граничных условий сказано ниже.

Пусть требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее на границе конечной области Ω изменения $X = (x_1, \ldots, x_n)$ условию $u|_S = 0$ и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(X), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(X).$$

Формальное решение этой задачи дается рядом Фурье

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t)\, u_k(X), \tag{2}$$

где

$$\Delta u_k = -\lambda_k^2 u_k, \quad u_k|_S = 0, \quad \int_\Omega u_k^2 d\Omega = 1,$$

$$a_k = \int_\Omega \varphi_0 u_k d\Omega, \quad b_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_\Omega \varphi_1 u_k d\Omega.$$

Вопрос заключается в том, при каких условиях ряд (2) после двукратного почленного дифференцирования по x_i и t будет равномерно сходящимся по X и t.

Предположим, что граничная поверхность S есть поверхность Ляпунова, уравнение которой в окрестности каждой точки поверхности при выборе местной системы координат имеет вид

$$x_n = \omega(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\omega(x_1, \ldots, x_{n-1})$ $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ раз непрерывно дифференцируема. Кроме того, поверхность S такова, что собственные функции $u_k(X)$ вплоть до контура S имеют непрерывные производные до $\left[\frac{n}{2}\right]+3$-го порядка [1].

Пусть далее, начальные функции φ_0 и φ_1 имеют непрерывные производные до порядков $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ и $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ соответственно и

$$\varphi_0|_S = \Delta\varphi_0|_S = \ldots = \Delta^{l_1}\varphi_0|_S = 0, \quad \text{где} \quad l_1 = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}\right]+2}{2}\right],$$

$$\varphi_1|_S = \Delta\varphi_1|_S = \ldots = \Delta^{l_2}\varphi_1|_S = 0, \quad \text{где} \quad l_2 = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{2}\right]^*.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$a_k = \frac{\alpha_k}{\lambda_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty,$$

$$b_k = \frac{\beta_k}{\lambda_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty.$$

Введем следующие обозначения:

$$J_k(v, w) = \int_\Omega \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} \frac{\partial^k v}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k w}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} d\Omega,$$

$$\Phi_k(v, w) = \int_S \sum_{i_1, \ldots, i_{k-1}=1}^{n} \frac{\partial^k v}{\partial n\, \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \frac{\partial^{k-1} w}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} ds,$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по внешней нормали к S;

$$H_k(v) = \sum_{s=1}^{k} J_s(v, v),$$

$$L_k(v) = \sum_{s=1}^{k} \left| J_1\left(\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]} v, \Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} v\right) \right|.$$

Тогда

$$J_k(v, v) = (-1)^{k-1} J_1\left(\Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]} v, \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} v\right) + \Phi_k(v, v) - \Phi_{k-1}(v, \Delta v) +$$
$$+ \Phi_{k-2}(\Delta v, \Delta v) - \ldots + (-1)^k \Phi_2\left(\Delta^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} v, \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} v\right). \tag{3}$$

---

* Можно потребовать от φ_0 и φ_1 наличия обобщенных производных тех же порядков, а условие обращения в нуль на контуре заменить принадлежностью $\varphi_i, \ldots \Delta^{l_i}\varphi_i$ к классу $\dot{D}$.

Обозначим сумму всех Φ_s входящую в правую часть последнего равенства, чернз $\Psi_k(v)$.

Выражение $\Psi_k(v)$ содержит под знаком интеграла производные v k-го и $(k-1)$-го порядков. Оказывается, если $v|_S = \Delta v|_S = \ldots = \Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]} v|_S = 0$, то $\Psi_k(v)$ можно преобразовать так, чтобы под знак контурного интеграла входили производные от v порядка не выше $(k-1)$-го. При этом подинтегральное выражение, попрежнему, останется квадратичной формой относительно производных v, только коэффициенты этой формы зависят от точки поверхности и содержат производные граничной функции $\omega(x_1, \ldots, x_{n-1})$ до порядка k.

Каждая производная v будет содержать, по крайней мере, одно дефференцирование по нормали к поверхности.

При этом преобразовании мы используем одну геометрическую лемму, доказанную К. Л. Смолицким [1].

Преобразованное $\Psi_k(v)$ уже нетрудно оценить так:

$$|\Psi_k(v)| \leqslant c\varepsilon J_k(v) + \frac{c}{\varepsilon} H_{k-1}(v), \quad k = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 3, \tag{4}$$

где ε — любое положительное число, а константа c зависит лишь от области.

Возьмем ε таким, чтобы $1 - c\varepsilon \geqslant {}^1/_2$.

Подставляя неравенство (4) в (3) и суммируя по k, получим

$$H_{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(v) \leqslant c_1 L_{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(v). \tag{5}$$

Эта основная оценка (5) и позволяет решить поставленный в работе вопрос.

Возьмем за функцию v отрезок ряда Фурье:

$$v = u_{pq} = \sum_{l=p}^{p+q} (a_l \cos \lambda_l t + b_l \sin \lambda_l t)\, u_l(X) = \sum_{l=p}^{p+q} d_l(t)\, u_l(X).$$

Для него

$$J_1\left(\Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]} u_{pq}, \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} u_{pq}\right) = \sum_{l=p}^{p+q} d_l^2 J_1\left(\Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]} u_l, \ \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} u_l\right) = (-1)^{k-1} \sum_{l=p}^{p+q} d_l^2 \lambda_l^{2k}.$$

Значит,

$$L_{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(u_{pq}) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3} \sum_{l=p}^{p+q} \lambda_l^{2k} d_l^2 \leqslant \left(2\left[\frac{n}{2}\right] + 6\right) \sum_{l=p}^{p+q} \lambda_l^{2\left[\frac{n}{2}\right]+6} (a_l^2 + b_l^2), \tag{6}$$

если p взято столь большим, что $\lambda_l^2 \geqslant 1$ при $l \geqslant p$. Подставляем (6) в (5):

$$H_{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(u_{pq}) \leqslant c_2 \sum_{l=p}^{p+q} \lambda_l^{2\left[\frac{n}{2}\right]+6} (a_l^2 + b_l^2) = c_2 \sum_{l=p}^{p+q} (\alpha_l^2 + \beta_l^2) \to 0 \quad \text{при } p, q \to \infty.$$

Последнее неравенство вместе с теоремой вложения С. Л. Соболева и доказывает равномерную по X и t сходимость рядов, получаемых почленным дифференцированием по x_i и t ряда Фурье до двух раз включительно.

Вышеуказанный результат остается в силе и для контурного условия $\frac{\partial u}{\partial n} + h(s)\, u|_S = 0$. Необходимо лишь изменить характер согласования начальных и граничных условий; именно, надо потребовать:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + h\varphi_0 \Big|_S = \ldots = \frac{\partial \Delta^{l_1}\varphi_0}{\partial n} + h\Delta^{l_1}\varphi_0 \Big|_S = 0, \quad l_1 = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}+2\right]}{2}\right];$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + h\varphi_1 \Big|_S = \ldots = \frac{\partial \Delta^{l_2}\varphi_1}{\partial n} + h\Delta^{l_2}\varphi_1 \Big|_S = 0, \quad l_2 = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}+1\right]}{2}\right].$$

Ряды, соответствующие этому условию, при $h \geqslant 0$ будут равномерно сходиться для $t \in [0, \infty)$, а при $h < 0$ — для $t \in [0, T]$.

Поступило
21 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. Л. Смолицкий, ДАН, 73, № 2 (1950).