Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 5

ГИДРОЛОГИЯ

К. К. ОРЛОВ и Б. А. ФИДМАН

ОБ УТОЧНЕНИИ ФОРМУЛЫ РАСХОДА ВЗВЕШЕННЫХ НАНОСОВ *

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 X 1950)

Расход взвешенных наносов $\overline{p}$, переносимых потоком через единичную площадку живого сечения, часто определяют по средним во времени величинам объемного содержания наносов, т. е. мутности $\overline{c}$ и скорости потока $\overline{w}$, полагая

$$\overline{p} = \overline{c}\,\overline{w}. \tag{1}$$

Полный расход наносов получается интегрированием величины $\overline{p}$ по площади живого сечения. Такой прием расчета неточен, так как не учитывает важных особенностей процесса, связанных с турбулентностью.

Рассмотрим плоское течение со свободной поверхностью, статистически однородное во времени и вдоль потока относительно скоростей движения жидкости и твердой взвеси, а также относительно объемного содержания последней. Распределение осредненной скорости $\overline{w}$ характеризуется, как известно, увеличением ее с удалением от дна. Осредненная мутность $\overline{c}$, в соответствии с положительной разностью плотностей наносов и жидкости, возрастает в направлении к дну. Выберем прямоугольную систему координат с осью x_1, направленной вдоль свободной поверхности потока по течению, и осью x_2, обращенной по перпендикуляру к дну.

Скорость твердых частиц перемещаемой потоком взвеси можно представить в любой момент времени как сумму

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathfrak{v}} \tag{2}$$

скорости $\vec{\mathrm{u}}$ жидкости и относительной скорости частиц $\vec{\mathfrak{v}}$, считая, что введенные векторы выражают величины мгновенных скоростей, осредненные по некоторому элементарному объему.

Скорость смеси жидкости и взвешенных частиц будет

$$\vec{\mathrm{w}} = c\,\vec{\mathrm{v}} + (1-c)\,\vec{\mathrm{u}} = \vec{\mathrm{u}} + c\,\vec{\mathfrak{v}}. \tag{3}$$

Будем считать, что турбулентные флуктуации относительной скорости частиц $\mathfrak{v}_1'$ и $\mathfrak{v}_2'$ малы в сравнении с ее осредненной вертикаль-

* Основная идея этой заметки принадлежит К. К. Орлову, погибшему в 1941 г. на фронте Великой Отечественной войны.

ной составляющей $\overline{\mathfrak{v}}$. Ввиду малости уклона потока продольная составляющая этой скорости $\mathfrak{v}_1$ также мала в сравнении с $\overline{\mathfrak{v}}$, а поперечную ее составляющую $\mathfrak{v}_2$ можно положить равной $\overline{\mathfrak{v}}$. В связи с этим примем:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, & v_2 &= u_2 + \overline{\mathfrak{v}}, \\ w_1 &= u_1, & w_2 &= u_2 + c\overline{\mathfrak{v}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Выражение для осредненного твердого расхода, которое мы теперь получим:

$$\overline{p}_1 = \overline{cv_1} = \overline{cu_1} = \overline{c}\,\overline{u} + \overline{c'u_1'} \tag{5}$$

отличается от упрощенной формулы (1), которую можно записать в виде $\overline{p}_1 = \overline{c}\,\overline{u}_1$, на величину $\overline{c'u_1'}$, представляющую момент корреляции мутности c и скорости u_1. В рассматриваемых условиях эта величина отрицательна и твердый расход по выражению (5) меньше величины, определяемой формулой (1)*. Так как поперечное перемешивание, связанное с турбулентностью, очевидно, играет решающую роль во всем процессе, то естественно предположить, что при исключении фактора перемешивания корреляция между величинами c и u_1 должна быть мала, на этом основании мы примем частный коэффициент корреляции $r(c, u_1)_{u_2}$ при фиксированном значении u_2 равным нулю:

$$r(c, u_1)_{u_2} = \frac{r(c, u_1) - r(u_1, u_2)\, r(c, u_2)}{\sqrt{[1 - r^2(c, u_2)]\,[1 - r^2(u_1, u_2)]}} = 0. \tag{6}$$

Величины r в правой части (6) представляют соответствующие полные коэффициенты корреляции. Пользуясь выражением

$$r(\alpha, \beta) = \frac{\overline{\alpha'\beta'}}{\sigma(\alpha)\,\sigma(\beta)},$$

в котором $\overline{\alpha'\beta'}$ — момент корреляции, а $\sigma(\gamma) = \sqrt{\overline{\gamma^2} - (\overline{\gamma})^2}$ $(\gamma = \alpha, \beta)$ — среднее квадратичное отклонение, находим из условия (6)

$$\overline{c'u_1'} = \frac{\overline{u_1'u_2'} \cdot \overline{c'u_2'}}{\sigma^2(u_2)}. \tag{7}$$

Величину $\overline{c'u_2'}$ найдем, следуя М. А. Великанову [1], из условия равенства нулю поперечных составляющих твердого $(\overline{p}_2)$ и жидкого $(\overline{q}_2)$ расходов:

$$\overline{p}_2 = \overline{cv_2} = \overline{c}\,\overline{u}_2 + \overline{c'u_2'} + \overline{c}\,\overline{\mathfrak{v}} = 0,$$

$$\overline{q}_2 = \overline{(1-c)\,u_2} = \overline{u}_2 - \overline{c}\,\overline{u}_2 - \overline{c'u_2'} = 0.$$

Имеем:

$$\overline{c'u_2'} = -(1 - \overline{c})\,\overline{c}\,\overline{\mathfrak{v}},$$

---

* Действительно, поступление в какую-либо точку потока элементарного объема жидкости, движущегося в силу турбулентного перемешивания, например, со стороны дна, связано с положительным отклонением мутности c и отрицательным отклонением скорости u_1, а поступление такого объема со стороны поверхности, наоборот, связано с отрицательным отклонением c и положительным отклонением u_1. В обоих случаях величина $c'u_1' < 0$ и, следовательно, $\overline{c'u_1'} < 0$.

Далее находим:

$$\overline{c' u_1'} = -k(1-\overline{c})\,\overline{c}\,\overline{\mathfrak{v}}, \tag{8}$$

где $k \equiv \dfrac{\overline{u_1' u_2'}}{\sigma^2(u_2)}$ всегда положительно и, следовательно, как и указывалось выше, действительно, $\overline{c' u_1'} < 0$.

Вместо (5) теперь получаем

$$\overline{p}_1 = \overline{c}\,\overline{u}_1 - k(1-\overline{c})\,\overline{c}\,\overline{\mathfrak{v}}. \tag{9}$$

Таким же путем можно найти выражение для жидкого расхода

$$\overline{q}_1 = \overline{u}_1(1-\overline{c}) + k(1-\overline{c})\,\overline{c}\,\overline{\mathfrak{v}}.$$

Скорости, определяемые по величине расхода, будут для твердых частиц и жидкости равны соответственно:

$$\frac{\overline{p}_1}{\overline{c}} = \overline{u}_1 - k(1-\overline{c})\,\overline{\mathfrak{v}},$$

$$\frac{\overline{q}_1}{1-\overline{c}} = \overline{u}_1 + k\overline{c}\,\overline{\mathfrak{v}}.$$

Составляя выражение разности этих величин

$$\frac{\overline{q}_1}{1-\overline{c}} - \frac{\overline{p}_1}{\overline{c}} = k\overline{\mathfrak{v}},$$

приходим к выводу, что твердые частицы в среднем отстают от жидкости на величину $k\overline{\mathfrak{v}} > 0$.

Отставание твердых частиц, переносимых турбулентным потоком, качественно подтверждается опытом, проведенным К. К. Орловым в лабораторном лотке с водным потоком, несущим частицы измельченного шлака.

Из выражения (9), между прочим, следует, что принятое в лабораторной практике вычисление средней мутности по измеренным объемам протекшей смеси и твердого вещества:

$$\frac{\overline{p}_1}{\overline{w}_1} = \frac{\overline{p}_1}{\overline{u}_1} = \overline{c} - k(1-\overline{c})\,\overline{c}\,\frac{\overline{\mathfrak{v}}}{\overline{u}_1} \tag{10}$$

дает значение, преуменьшенное по сравнению с $\overline{c}$.

Полагая в (9), в виду малости $\overline{c}$,

$$1 - \overline{c} \approx 1,$$

получим еще следующие приближенные выражения: для твердого расхода $\overline{p}_1$:

$$\overline{p}_1 \approx \overline{c}\,(\overline{u}_1 - k\,\overline{\mathfrak{v}}); \tag{9'}$$

для величины $\overline{p}_1 / \overline{w}_1$:

$$\frac{\overline{p}_1}{\overline{w}_1} \approx \overline{c}\left(1 - k\frac{\overline{\mathfrak{v}}}{\overline{u}_1}\right). \tag{10'}$$

Предварительная количественная оценка характеристики турбулентности k для потока в лотке, по измерениям Б. А. Фидмана, в согласии с результатом обработки данных Е. М. Минского (2), показывает, что вблизи дна k близко к единице и с удалением от дна убывает. Отсюда можно заключить, что введение предложенной поправки может в некоторых условиях оказаться существенным. Установление надежной численной величины этой поправки требует дополнительного экспериментального исследования.

Укажем еще форму, которую получает выражение (9), если не пользоваться допущениями (4):

$$\bar{p}_1 = \bar{c}\bar{u}_1 + \bar{c}\,\bar{\mathfrak{v}}_1 + \overline{c'\mathfrak{v}_1'} - \bar{k}(1-c)(\bar{c}\,\bar{\mathfrak{v}}_2 + \overline{c'\mathfrak{v}_2'}). \tag{9''}$$

Переход к выражению такого вида может заслуживать внимания при рассмотрении потока с большим уклоном, способного переносить крупные частицы. Соответствующая уточненная форма выражения (10) имеет вид:

$$\frac{\bar{p}_1}{\bar{w}_1} = \bar{c} + \frac{1-c}{\bar{w}_1}(\overline{c\mathfrak{v}_1} - \overline{kc\mathfrak{v}_2}). \tag{10''}$$

В заключение укажем на возможность применения предложенного приема рассмотрения к другим задачам, связанным с переносом турбулетным потоком раздробленного вещества. Так например, пузырьки воздуха в аэрированном с поверхности потоке большой скорости должны, согласно нашим представлениям, обгонять жидкость; тяжелые частицы при напорном гидротранспорте и пневмотранспорте в нижней части горизонтальных труб отстают от переносящей их среды, а в верхней части должны обгонять ее; легкие пузырьки пара или газа в аналогичных условиях должны вести себя в этом смысле прямо противоположным образом и т. д.

Автор, на долю которого выпало оформление этой заметки, выражает благодарность А. Н. Колмогорову и М. А. Великанову за сделанные замечания, учтенные в настоящем изложении.

Институт географии
Академии наук СССР

Поступило
16 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Великанов, Изв. АН СССР, ОТН, № 3 (1944). [2] Е. М. Минский, Тр. ЦАГИ, № 625 (1947).