Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА — СЛУЧАЙ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ФАЗ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 12 X 1950)

В этой работе решена общая задача Стефана (задача замерзания) — случай, когда чередуется произвольное число твердых и жидких фаз одного тела, например, вода — лед или влажная почва, в которой существуют замерзшие слои. При двух фазах конечной толщины l_1 и l_2 решение этой задачи впервые дано Л. И. Рубинштейном [1]. Пользуясь иным методом, мы дали в [2] короткое изложение, а в [3] — более полное решение линейной задачи для случая $l_1 = l_2 = \infty$ и в [4] — решение для случая конечных толщин l_1 и l_2. Примененный в [2,4] метод используем и теперь (в работах [1–4] указана и другая литература по вопросу).

Рассмотрим плоские однородные касающиеся слои A_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$, представляющие твердую и жидкую фазы одного тела, чередующиеся между собой. Пусть ось OX нормальна к их плоскостям соприкосновения, которые пересекают OX в точках $O_0, O_1, \ldots, O_r$. Слой A_h толщиной l_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ определяется вполне точками $O_{h-1}(x^{h-1})$ и $O_h(x^h)$, $l_h = x^h - x^{h-1}$. Примем, что r нечетно и $A_1, A_3, \ldots, A_r$ представляют твердую фазу, а $A_2, A_4, \ldots, A_{r-1}$ — жидкую, но, конечно, данное ниже решение одинаково приложимо для r четного или другого произвольного выбора фаз A_1 и A_r. Пусть k_h (соответственно a_h) — коэффициент теплопроводности (соответственно температуропроводности) слоя A_h, причем полагаем $k_1 = k_3 = \ldots = k_r$, $k_2 = k_4 = \ldots = k_{r-1}$, $a_1 = a_3 = \ldots$ Абсцисса точки O_h меняется, мы ее обозначим $s^h(t)$, при $s^h(t_0) = x^h = x_0^h$, а температуры точек $O_1, \ldots, O_{r-1}$ постоянные, равные φ_0 (температуры плавления, нуль для случая вода — лед). Пусть $u^h(x, t)$ — температура слоя A_h. u^h удовлетворяет уравнению

$$a_h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x} = \frac{\partial u^h}{\partial t} \quad (h = 1, 2, \ldots, r) \tag{1}$$

и начальным условиям

$$u^h(x, t_0) = \Phi^h(x) \quad (x^{h-1} < x < x^h). \tag{2}$$

В точках $O_1, O_2, \ldots, O_{r-1}$ имеем условия постоянства температур

$$u^1[s^1(t), t] = u^2[s^1(t), t] = u^2[s^2(t), t] = \ldots = u^r[s^{r-1}(t), t] = \varphi_0 \quad (t > t_0). \tag{3}$$

Функции $u^2, \ldots, u^{r-1}$ удовлетворяют условиям на концах (3), а u^1 и u^r — условиям (3) и условиям в точках O_0 и O_h

$$u^1(x^0, t) = \varphi(t) > \varphi_0, \quad u^r(x^r, t) = \psi(t) > \varphi_0 \quad (t > t_0); \tag{3'}$$

Φ^h, φ, ψ — ограниченные интегрируемые функции своих аргументов.

В точках $O_1, \ldots, O_{r-1}$ выполняются еще условия Стефана

$$\frac{ds^h}{dt} = \left(k_h \frac{\partial u^h}{\partial x} - k_{h+1} \frac{\partial u^{h+1}}{\partial x} \right)_{x=s^h(t)} \quad (h = 1, 2, \ldots, r-1). \tag{4}$$

Рассматриваемая здесь задача Стефана состоит в следующем:

Найти функции $u^1(x, t), \ldots, u^r(x, t), s^1(t), \ldots, s^{r-1}(t)$, удовлетворяющие (1), (2), (3), (3'), (4).

Разобьем интервал $(t_0, t_0 + T)$, в котором изучаем процесс, на n частей, соответствующих моментам

$$t_0, \ t_1, \ldots, t_{n-1}, \ t_n = t_0 + T, \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Рассмотрим процесс, при котором температурная функция u^h удовлетворяет (1), имеет начальное значение $\Phi^h(x)$ и значения на концах, определенные из (3) и (3') по данным кривым $c^h \equiv x = s^h(t)$ и $c^{h+1} \equiv x = s^{h+1}(t)$ в плоскости (x, t), $s^h(t_0) = x^h$, $s^{h+1}(t_0) = x^{h+1}$. Эта задача решена в ([5]). Здесь, как в ([2-4]), даем другое, более подходящее решение. Для этого заменяем данную кривую $s^h(t)$ ломаной $s^h_{in}(t)$, состоящей из сегментов, параллельных последовательно осям x и t, именно: сегментов $[s^h(t_i), t_i] - [s^h(t_i), t_{i+1}]$, параллельных оси t, и сегментов $[s^h(t_i), t_{i+1}] - [s^h(t_{i+1}), t_{i+1}]$, параллельных оси x. Функцию $u^h(x, t)$ в интервале Δt_i обозначим через $u^h_{in}(x, t)$, $t_i < t \leqslant t_{i+1}$, $s^{h-1}(t_i) < x < s^h(t_i)$. Она будет решением (1) при начальных условиях (2) и условиях на концах (3) или (3'). Она представится, как в ([2-4]) или ([6]), в виде

$$u^h_{in}(x, t) = V^h_{in}(x, t) + W^h_{in}(x, t) \quad (h = 1, \ldots, r; \ i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{5}$$

где

$$V^h_{in}(x, t) = \int\limits_{x_i^{h-1}}^{x_i^h} \Gamma^h_i(x, \xi, t)\, \Phi^h_i(\xi)\, d\xi, \quad \Phi^h_{i+1}(x) = u^h_i(x, t_{i+1}), \tag{6}$$

$$\Gamma^h_i(x, \xi, t) = \frac{1}{2l_{hi}} \left\{ \vartheta_3 \left(\frac{x-\xi}{2l_{hi}}, \ \frac{a_h(t-t_i)}{l^2_{hi}} \right) - \vartheta_3 \left(\frac{x+\xi-2x_i^{h-1}}{2l_{hi}}, \ \frac{a^2_h(t-t_i)}{l^2_{hi}} \right) \right\}, \tag{6'}$$

$$\vartheta_3(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(x+\nu)^2/t},$$

$$W^h_{in}(x, t) = -\frac{a^2_h}{l_{hi}} \int\limits_{t_i}^{t} \varphi^h_1(\tau) \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} \left(\frac{x - x_i^{h-1}}{2l_{hi}}, \ \frac{a^2_h(\tau - t_i)}{l^2_{hi}} \right) d\tau +$$

$$+ \frac{a^2_h}{l_{hi}} \int\limits_{t_i}^{t} \varphi^h_2(\tau) \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} \left(\frac{x_i^h - x}{2l_{hi}}, \ \frac{a^2_h(\tau - t_i)}{l^2_{hi}} \right) d\tau \tag{7}$$

и положено

$$\varphi^1_1 = \varphi(t), \quad \varphi^1_2 = \varphi^2_1 = \varphi^2_2 = \ldots = \varphi^r_1 = \varphi_0, \quad \varphi^r_2 = \psi(t). \tag{7'}$$

Формулы (5), (6), (7) для $i = 0$ определяют функцию $u^h_{0n}(x, t)$ $(x^{h-1} < x < x^h, \ t_0 < t \leqslant t_1)$, так как функции $\Phi^h_0(x) = \Phi^h(x)$ известны. Имея в виду рассмотренный процесс, где кривая $s^h(t)$ заменена кривой

ПОПРАВКА К СТАТЬЕ А. Б. ДАЦЕВА

В формулах (4), (8) и (9) пропущен численный множитель $e = (-1)^{h+1} / \rho\sigma$, где ρ — плотность, σ — удельная теплота.

Эти формулы следует читать так:

$$\frac{ds^h}{dt} = e \left(k_h \frac{\partial u^h}{\partial x} - k_{h+1} \frac{\partial u^{h+1}}{\partial x} \right)_{x=s^h(t)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r-1). \tag{4}$$

$$\frac{ds^h_{pn}}{dt} = e \left(k_h \frac{\partial u^h_{pn}}{\partial x} - k_{h+1} \frac{\partial u^{h+1}_{pn}}{\partial x} \right)_{x=s^h_{pn}(t_p)} \qquad (t_p < t \leqslant t_{p+1}). \tag{8}$$

$$s^h_{in}(t_{i+1}) = s^h(t_0) + e \sum_{p=0}^{i-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \left(k_h \frac{\partial u^h_{pn}}{\partial x} - k_{h+1} \frac{\partial u^{h+1}_{pn}}{\partial x} \right)_{x=s^h_{pn}(t_p)} dt. \tag{9}$$

$s^h_{in}(t)$, получаем $\Phi^h_1(x) = u^h_{0n}(x, t_1)$. Формулы (5), (6), (7) для $i = 1$ определяют также функции $u^h_{1n}(x, t)$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$, затем $u^h_{2n}(x, t)$ $(t_2 < t \leqslant t_3)$ и т. д. все $u^h_{in}(x, t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Граничный переход $n \to \infty$ осуществляется так же, как в [4]. Легко установить, как и в [4], что последовательность функций u^h_{in} ограничена для каждого n. Так же как в [4] устанавливается, что когда ломаная s^h_{in} стремится к своему пределу $s^h(t)$, последовательности функций u^h_{in} стремятся к пределам $u^h(x, t)$, которые удовлетворяют уравнениям (1) для $t_0 < t \leqslant t_0 + T$, $s^h(t) < x < s^{h-1}(t)$.

Теперь вернемся к задаче Стефана, определенной (1) — (4). Рассмотрим в интервале (t_p, t_{p+1}) $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ следующие условия, заменяющие условия Стефана (4):

$$\frac{ds^h_{pn}}{dt} = \left(k_h \frac{\partial u^h_{pn}}{\partial x} - k_{h+1} \frac{\partial u^{h+1}_{pn}}{\partial x} \right)_{x = s^h_{pn}(t_p)} \qquad (t_p < t \leqslant t_{p+1}). \tag{8}$$

Для $t_0 < t \leqslant t_1$ определим функции $u^h_{in}(x, t)$, удовлетворяющие (1), (2), (3), (3'), т. е. функции, данные (5), (6), (7) для $i = 0$. Условия (8), правая часть которых известная функция t, определяют для $p = 0$ функции $s^h_{0n}(t)$, следовательно, и их значения $s^h_{0n}(t_1)$ через $s^h_{0n}(t_0) = x^h$. После замещения этих значений $s^h_{0n}(t_1)$ и функции $u^h_{in}(x, t)$ (5) для $i = 1$, эти последние будут вполне определены в интервале $t_1 < t \leqslant t_2$. Уравнения (8) для $p = 1$ определяют функции $s^h_{in}(t)$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$, т. е. значения $s^h_{in}(t_2)$, и т. д., откуда получим для каждого t $(t_i < t \leqslant t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1)$ функции $u^h_{in}(x, t)$ $(h = 1, \ldots, r)$ и $s^h_{in}(t)$ $(h = 1, \ldots, r-1)$. Когда число интервалов $n \to \infty$ и все $\Delta t_i \to 0$ одновременно, очевидно, условия (8) превратятся в условия Стефана (4), а для функций s^h_{in} $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ получим, интегрируя (8) по t и суммируя полученные уравнения для $p = 0, 1, \ldots, i-1$,

$$s^h_{in}(t_{i+1}) = s^h(t_0) + \sum_{p=0}^{i-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \left(k_h \frac{\partial u^h_{pn}}{\partial x} - k_{h+1} \frac{\partial u^{h+1}_{pn}}{\partial x} \right)_{x = s^h_{pn}(t_p)} dt. \tag{9}$$

Доказательство существования пределов $u^1, \ldots, u^r$, $s^1, \ldots, s^{r-1}$ последовательностей $u^1_{in}, \ldots, s^{r-1}_{in}$ аналогично данному в [4]. Это вытекает из следующей теоремы, доказанной в [3] и использованной в [4]. Пусть фаза A_h простирается по OX от точки O_h $(s^h = x^h)$ до точки O_{h+1} $(s^{h+1} = x^{h+1})$ при начальной температуре $\Phi^h(x)$. Пусть $u^h_1(x, t)$ — решение уравнения (1) при начальной температуре $\Phi^h(x)$ и температурах на концах φ_0 и $\varphi(t)$, соответственно, по данным кривым $s^h_1(t)$ и $s^{h+1}(t)$, где $s^h_1(t_0) = x^h$, $s^{h+1}(t_0) = x^{h+1}$, и $u^h_2(x, t)$ — решение (1) при той же начальной температуре $\Phi^h(x)$ и температурах на концах φ_0 и $\varphi(t)$, соответственно, по данным кривым $s^h_2(t)$ и $s^{h+1}(t)$, где $s^h_2(t_0) = x^h$. Обозначим через $Q_{h1}(t)$ и $Q_{h2}(t)$ количества тепла, полученные с конца O_h, данные криволинейными интегралами по s^h_1 и s^h_2:

$$Q_{h1}(t) = k_h \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial u^h_1}{\partial x} \right)_{x = s^h_1(t)} dt, \quad Q_{h2}(t) = k_h \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial u^h_2}{\partial x} \right)_{x = s^h_2(t)} dt. \tag{10}$$

Тогда, если около точек O_h имеем одно из неравенств $s_1^h(t) \gtrless s_2^h(t)$, то будем иметь соответствующее неравенство

$$Q_{h1}(t) \gtrless Q_{h2}(t) \tag{11}$$

для достаточно малых значений $t - t_0$.

Из этой теоремы следует, что задача Стефана (1) — (4) не может иметь более одного решения. Действительно, допустим, что в качестве решения задачи имеем две системы функций: $s^1(t), \ldots, s^{r-1}(t)$, $u_1^1(x, t), \ldots, u_1^r(x, t)$ и $\sigma^1(t), \ldots, \sigma^{r-1}(t)$, $u_2^1(x, t), \ldots, u_2^r(x, t)$ и примем, что около точек O_h, например, $s^h(t) < \sigma^h(t)$. Напишем условия (4) для первой и второй систем функций, интегрируем их по t и вычтем почленно полученные равенства. Тогда из неравенства (11) получим, как в ([4]), $s^h(t) < \sigma^h(t)$, т. е. $s^h(t) \equiv \sigma^h(t)$, или, другими словами, задача не может иметь более одного решения для $t - t_0$ достаточно малого. Доказывается, как в ([3,4]), что это имеет также место для каждого конечного интервала $t - t_0$. Из неравенства (11) следует также, что последовательности $s_{in}^1, \ldots, s_{in}^{r-1}$ и $u_{in}^1, \ldots, u_{in}^r$ достигают своих пределов. Случай, когда одна из промежуточных фаз исчезает, рассматривается непосредственно и не вызывает затруднений, но случай появления фазы (например, появления льда при охлаждении водяного слоя с одной стороны) не может рассматриваться непосредственно изложенным методом и нуждается в дополнительных исследованиях. Если одна из фаз в концах, например A_1, имеет бесконечную толщину, $l_1 = \infty$, то, полагая $l_1 = \infty$ в (5), получим непосредственно этот случай. Таким образом получим и случай, когда одновременно $l_1 = \infty$, $l_r = \infty$, полагая в найденных выше формулах $l_1 = l_r = \infty$.

Поступило
18 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Рубинштейн, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 11, № 1 (1947). [2] А. Б. Дацев, ДАН, 58, № 4 (1947). [3] A. B. Datzeff, Ann. de l'Univ. de Sofia, 45, 1 (1948/49). [4] А. Б. Дацев, ДАН, 74, № 3 (1950). [5] Е. Гурса, Курс матем. анализа, 3, М., 1933. [6] G. Doetsch, Die Laplace Transformation, Berlin, 1937.