Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

А. С. МОНИН

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ АНИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 X 1950)

Подобно тому, как хаотическое молекулярное движение характеризуется температурой и длиной свободного пробега молекул, турбулентность можно достаточно полно охарактеризовать ее интенсивностью (средней кинетической энергией) и масштабом, т. е. характеристикой размерности длины, пропорциональной как пути перемешивания (среднему расстоянию, на которое способны перемещаться турбулентные образования, сохраняя свою индивидуальность), так и средним размерам турбулентных образований. Турбулентность может характеризоваться различными масштабами по разным направлениям, так как геометрические границы потоков и наличие массовых сил создают неравноправие различных направлений по отношению к возможности возникновения турбулентных образований определенных размеров и к перемещению турбулентных образований. Поэтому в каждой точке потока должен быть определен некоторый эллипсоид масштабов.

Идея характеризовать турбулентность ее энергией и тензором масштабов неоднократно высказывалась А. Н. Колмогоровым. Ниже мы предлагаем естественный путь введения этих характеристик, исходя от введенного еще Рейнольдсом тензора добавочных напряжений.

Пусть Π и Φ обозначают, соответственно, тензор добавочных напряжений и тензор скоростей деформации осредненного поля. Компоненты этих тензоров в декартовой системе координат x_i имеют вид

$$\Pi_{ij} = \rho\overline{v'_i v'_j}, \qquad \Phi_{ij} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{n}\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}, \tag{1}$$

где ρ — плотность среды, $\bar{v}_i$ и v'_i — компоненты осредненной скорости и пульсации скорости, δ_{ij} — компоненты единичного тензора I, n — размерность потока ($n = 2$ или 3), черточка сверху означает осреднение, по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование.

След тензора Π равен удвоенной кинетической энергии турбулентности: $\rho\overline{v'_\alpha v_\alpha} = 2\bar{\rho} b$, где b — энергия турбулентности в единице массы. Добавочные напряжения Π зависят от поля осредненной скорости. Если оно однородно, т. е. жидкие частицы в среднем движении не деформируются ($\Phi = 0$), то напряжения Π для каждого элемента поверхности в жидкости направлены по нормали к этому элементу, так что тензор Π изотропен: $\Pi = k\mathrm{I}$. При этом, очевидно, $k = \frac{1}{n}\Pi_{\alpha\alpha} = \frac{2}{n}\bar{\rho} b$. Таким образом, турбулентная энергия $\bar{\rho} b$ аналогична давлению.

При неоднородном поле осредненной скорости тензор Π уже анизотропен и должен зависеть от производных скорости по координатам. Если эти производные невелики, такую зависимость можно считать линейной, так что Π будет линейной функцией от Φ, коэффициенты которой будут иметь смысл коэффициентов виртуальной вязкости.

Опыт показывает, что турбулентная среда по различным направлениям характеризуется, вообще говоря, различными значениями коэффициента вязкости (что приводит к различным скоростям диффузии примесей). Поэтому естественно считать, что коэффициенты виртуальной вязкости образуют симметричный тензор второго ранга. Обозначим его $\mathbf{M}$. Тогда, поскольку тензор Π симметричен, следует положить $\Pi = k\mathbf{I} - {}^1/_2\,(\mathbf{M}\Phi + \Phi\mathbf{M})$. Анизотропность тензора $\mathbf{M}$ может иметь лишь те же причины, что и анизотропность тензора масштабов $\mathbf{L}$, так что коэффициент виртуальной вязкости M_{rr} по данному направлению $\mathbf{r}$ следует считать пропорциональным масштабу турбулентности L_{rr} по этому направлению. Из соображений размерности $\mathbf{M} = \overline{\rho b^{1/2}}\mathbf{L}$.

Таким образом, положим

$$\Pi = \frac{2}{n}\,\overline{\rho b}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\,\overline{\rho b^{1/2}}\,(\mathbf{L}\Phi + \Phi\mathbf{L}). \qquad (2)$$

Если выражение (2) может быть однозначно разрешено относительно $\mathbf{L}$, то оно будет просто определением новой характеристики турбулентности $\mathbf{L}$ взамен тензора Π. Для этого достаточно, чтобы детерминант шести уравнений (2) относительно шести компонент тензора $\mathbf{L}$ был отличен от нуля. Этот детерминант легко вычислить в системе координат, в которой тензор Φ имеет диагональный вид.

Будем обозначать компоненты тензоров Π, $\mathbf{L}$, Φ и вектора скорости $\mathbf{v}$ в этой системе координат через π_{ij}, l_{ij}, φ_{ij} и v_i. Тогда уравнения (2) перепишутся в виде

$$l_{ii}\,(\varphi_{ii} + \varphi_{jj}) = \frac{2}{\overline{\rho b^{1/2}}}\left(\frac{2}{n}\,\overline{\rho b}\,\delta_{ij} - \pi_{ij}\right),$$

и, поскольку след тензора Φ равен нулю, легко видеть, что детерминант системы равен

$$\pm\,\varphi_{11}^2\varphi_{22}^2\varphi_{33}^2 = \pm\,(\operatorname{Det}\Phi)^2.$$

Таким образом, мы должны требовать, чтобы тензор Φ не вырождался. При этом условии выражение (2) не будет содержать никаких гипотез, а рассуждения, имевшие эвристическое значение при составлении выражения (2), будут служить лишь для физической интерпретации величин $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M} = \overline{\rho b^{1/2}}\mathbf{L}$.

Смысл условия $\operatorname{Det}\Phi \neq 0$ легко выяснить в случае $n = 2$. В декартовых координатах

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial \bar v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar v_\alpha}{\partial x_\alpha}\,\delta_{ij}\right) = -\left[\left(\frac{\partial \bar v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar v_2}{\partial x_1}\right)^2\right]. \qquad (3)$$

Согласно известной формуле Стокса, это выражение с точностью до множителя совпадает с диссипацией механической энергии в теплоту, и $\operatorname{Det}\Phi = 0$ означает, что энергия среднего движения непосредственно в теплоту не диссипируется. При этом $\frac{\partial \bar v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar v_2}{\partial x_2}$ и

$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}$, так что $\Delta \bar{v}_i = 0$. В случае несжимаемого движения это означает, что $\bar{v}_1 = ax_2 + \text{const}$, $\bar{v}_2 = -ax_1 + \text{const}$, т. е. среда движется как твердое тело. В дальнейшем мы предполагаем, что $\text{Det}\,\Phi \neq 0$.

Из формулы (2) следует, что след тензора $\mathbf{L}\Phi + \Phi\mathbf{L}$ равен нулю, что является единственным условием, связывающим $\mathbf{L}$ непосредственно с полем осредненной скорости, минуя другие характеристики турбулентности. Это условие заведомо выполняется, если тензор $\mathbf{L}$ изотропен ($\mathbf{L} = l\mathbf{I}$).

Смысл этого условия при анизотропности тензора $\mathbf{L}$ поясним для случая $n = 2$: $l_{11}\varphi_{11} + l_{22}\varphi_{22} = 0$ вместе с $\varphi_{11} + \varphi_{22} = 0$ означает, что $l_{11} = l_{22}$, т. е. что главные направления тензоров $\mathbf{L}$ и Φ образуют друг с другом углы в 45°. Главные же направления тензора Φ просто определяются по полю скорости. Именно, собственные значения тензора Φ равны $\pm|\text{Det}\,\Phi|^{1/2}$ (см. формулу (3)), и соответствующие главные направления образуют с осью x_1 декартовой системы координат углы φ, определяемые равенством

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm|\text{Det}\,\Phi|^{1/2} - \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}\right)}{\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}}. \tag{4}$$

Из формулы (2) следует также, что главные направления тензоров Π и $\mathbf{L}\Phi + \Phi\mathbf{L}$ совпадают, так как эти тензоры одновременно приводятся к диагональному виду. При $n = 2$ главные направления тензоров Π и $\mathbf{L}\Phi + \Phi\mathbf{L}$ совпадают с главными направлениями тензора Φ, так как вследствие равенства нулю следа тензора Φ при $i \neq j$ имеем $l_{ij}(\varphi_{ii} + \varphi_{jj}) = 0$. Поэтому при $n = 2$ главные направления тензора Π также определяются формулой (4).

Главные значения тензора Π легко вычислить в той системе координат, в которой тензор Φ диагонален; они равны

$$\overline{\rho v_1'^2} = \bar{\rho} b - \bar{\rho} b^{1/2} l_{11}\varphi_{11}, \quad \overline{\rho v_2'^2} = \bar{\rho} b + \bar{\rho} b^{1/2} l_{11}\varphi_{11}, \tag{5}$$

так как $l_{11} = l_{22}$ и $\varphi_{11} = -\varphi_{22}$.

Формулы (5) показывают, что тензор Π при $\text{Det}\,\Phi \neq 0$ анизотропен, независимо от анизотропности тензора $\mathbf{L}$, причем большая полуось квадрики тензора Π соответствует тому главному направлению, которое связано с отрицательным собственным значением тензора Φ (знак минус в формуле (4)). Под квадрикой мы подразумеваем здесь поверхность, определяемую уравнением $(\Pi^{-1}\mathbf{r}, \Pi^{-1}\mathbf{r}) = 1$.

В качестве примера рассмотрим плоское движение, параллельное оси x_1 декартовой системы координат ($\bar{v}_2 = 0$) и однородное в направлении этой оси ($\partial \bar{v}_1/\partial x_1 = 0$). В этом примере направления x_1, x_2 суть направления главных диаметров эллипса, являющегося квадрикой тензора $\mathbf{L}$, и направления асимптот гиперболы, являющейся квадрикой тензора Φ. Главные диаметры эллипса, являющегося квадрикой тензора Π, образуют с осями x_1, x_2 углы в 45°, причем большая полуось образует с осью x_1 угол φ, определяемый равенством $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{sign}(\partial \bar{v}_1/\partial x_2)$. Легко видеть, что такое направление наиболее интенсивных пульсаций скорости способствует выравниванию поля скорости, а при наличии шероховатой стенки OX_1 приводит к торможению движения.

Таким образом, следствия предложенной формулы (2) полностью соответствуют существующим эмпирическим представлениям о структуре анизотропной турбулентности. Формула (2) не является дополнительным уравнением в теории турбулентности. Она лишь позволяет заменить характеристику II более наглядной геометрической характеристикой L. Для определения величин b и L одновременно с распределением скорости необходимо построение дополнительных уравнений. Уравнения для определения b уже неоднократно предлагались в ряде работ ([1-3]).

Центральный институт прогнозов

Поступило
13 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. физ., № 1—2 (1942). [2] А. М. Обухов, Тр. ИТГ АН СССР, № 1 (1946). [3] А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3 (1950).