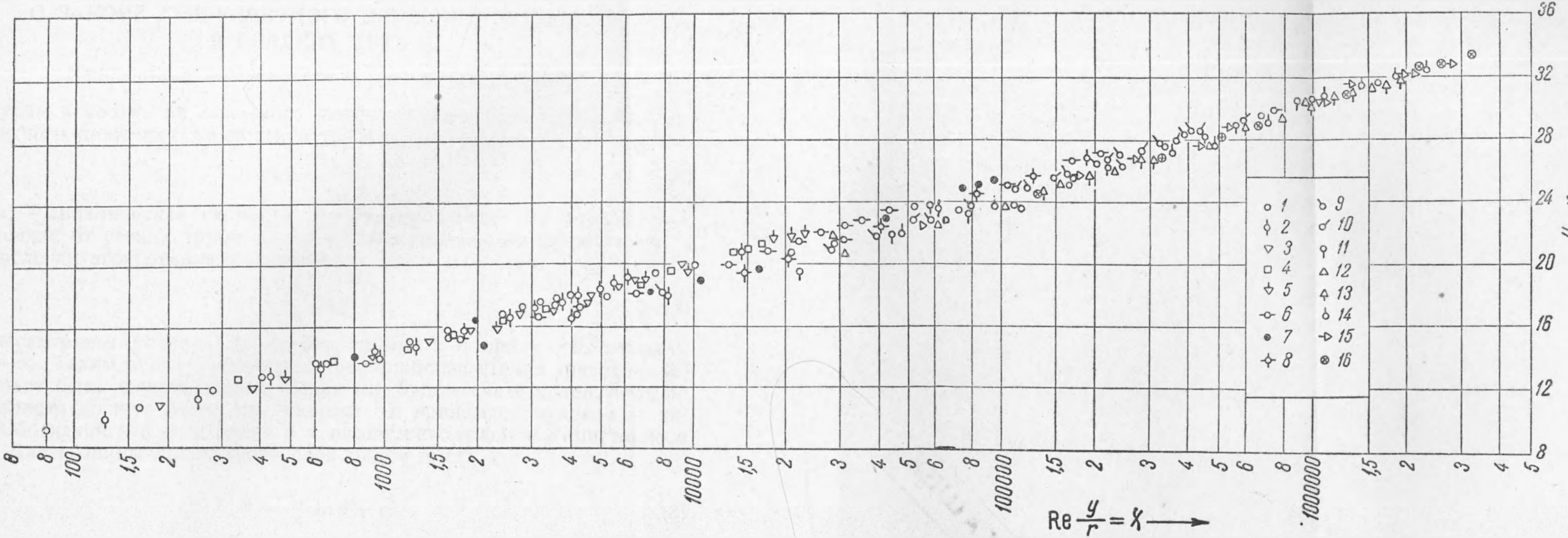

Рис. 1. Универсальный закон распределения скоростей в гладких трубах. Опыты Никурадзе. *1* — Re = 4000; *2* — 6100; *3* — 9200; *4* — 16 200; *5* — 23 300; *6* — 43 400; *7* — 105 000; *8* — 205 000; *9* — 396 000; *10* — 725 000; *11* — 1 110 000; *12* — 1 536 000; *13* — 1 959 000; *14* — 2 350 000; *15* — 2 790 000; *16* = 3 240 000

Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Д. АЛЬТШУЛЬ

О ЗАКОНЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГЛАДКИХ ТРУБАХ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 14 X 1950)

Будем исходить из основного дифференциального уравнения турбулентного движения жидкости в трубах [1]

$$du = \frac{u_*}{\varkappa}\frac{dy}{y}, \tag{1}$$

где u_* — динамическая скорость, $\varkappa$ — универсальная постоянная, y — расстояние от стенки трубы до слоя, движущегося со скоростью u.

После интегрирования получаем

$$u = \frac{u_*}{\varkappa}\ln y + c. \tag{2}$$

Рассматривая условия на стенке трубы, т. е. при $y = 0$, находим $u = -\infty$. Таким образом, непосредственно вблизи стенок уравнение (2) перестает быть справедливым. Закон (2) будем считать действительным вплоть до того слоя, где скорость u принимает нулевое значение. Обозначим это расстояние δ и назовем его толщиной пристенного слоя. Для границы пристенного слоя будем иметь

$$0 = \frac{u_*}{\varkappa}\ln\delta + c. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{\delta}. \tag{4}$$

Для максимальной и средней скорости соответственно будем иметь

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{r}{\delta}, \tag{5}$$

$$\frac{v_{\text{ср}}}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y_v}{\delta}, \tag{6}$$

где y_v — расстояние от стенки трубы до слоя, движущегося со средней скоростью. Учитывая известное соотношение [1]

$$v_{\text{ср}} / u_* = \sqrt{8}/\sqrt{\lambda}, \tag{7}$$

находим выражение для коэффициента трения λ

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{8}}\ln\frac{y_v}{r}\frac{r}{\delta}. \tag{8}$$

Вычитая (6) из (5), получаем

$$\frac{u_{\max} - v_{\text{ср}}}{u_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{r}{y_v}. \tag{9}$$

Но, как известно из гидравлики [1],

$$\frac{u_{\max} - v_{\text{ср}}}{u_*} = \frac{3}{2\varkappa}. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), имеем $y_v / r = 0{,}223$.

Толщину пограничной области турбулентного потока Н. Е. Жуковский предложил считать обратно пропорциональной скорости потока [2]. Распространяя эту гипотезу Н. Е. Жуковского на рассматриваемый случай руслового потока и учитывая размерности, получим для определения толщины пристенного слоя выражение

$$\delta = Ж\, \nu / v_{\text{ср}}, \tag{11}$$

где Ж — безразмерная постоянная, которую назовем „универсальная константа Жуковского".

Рис. 2. Универсальный закон распределения скоростей вблизи гладкой стенки $\varphi = f(\eta)$. Данные Никурадзе. *1, 3, 5, 7, 9* — опытные данные (табл. 2 Никурадзе); *2, 4, 6, 8, 10* — подогнанные данные (табл. 3 Никурадзе); *1, 2* — Re = 4000; *3, 4* — 6100; *5, 6* — 9200; *7, 8* — 16 700; *9, 10* — 23 300

Подставляя (11) в (4) и (8), получаем выражения для закона распределения скоростей и закона сопротивления при турбулентном движении в гладких трубах

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y v_{\text{ср}}}{Ж\, \nu} = A_1 \lg \mathrm{Re} \frac{y}{r} + B_1, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\varkappa \sqrt{8}} \ln \frac{y_v}{r} \frac{2 r v_{\text{ср}}}{2 Ж\, \nu} = A_2 \lg \mathrm{Re} + B_2. \tag{13}$$

Формулы вида (13) неоднократно предлагались в качестве эмпирических зависимостей для определения коэффициента сопротивления гладких труб, причем неизменно отмечалось их весьма хорошее совпадение с опытными данными [3–5]. Так, в частности, А. Н. Колмогоров [6] указывает, что при значениях постоянных $A_2 = 1{,}8$; $B_2 = -1{,}5$, рекомендуемых П. К. Конаковым [7], уравнение (13) дает среднее квадратичное отклонение от опытных данных Никурадзе всего в 0,070% (для Re от 3000 до $3240 \cdot 10^3$). Что же касается зависимости (12), то на рис. 1 приведено сравнение ее с опытными данными, полученными Никурадзе при исследовании гладких труб [8]. Как видим, и здесь имеет место вполне удовлетворительное совпадение теории с опытом.

Таким образом, приходим к выводу, что гипотеза (11), отвечающая воззрениям Н. Е. Жуковского, приводит к зависимостям, хорошо подтверждаемым опытами в обоих, наиболее важных случаях (закон распределения скоростей и закон сопротивления). Полученные зависимости (12) и (13) значительно проще известных формул Кармана — Прандтля.

$$\frac{u}{u_*} = A_3 \lg \frac{u_* y}{\nu} + B_3, \tag{14}$$

$$1 / \sqrt{\lambda} = A_4 \lg \mathrm{Re} \sqrt{\lambda} + B_4, \tag{15}$$

ибо дают возможность непосредственно определять искомые величины ($1 / \sqrt{\lambda}$ и u / u_*) на основании основных характеристик потока ($v_{ср}$, d, ν, y), в то время как уравнения (14) и (15) решаются подбором.

Уравнения (14) и (15) получены, исходя из общепринятого выражения Прандтля для толщины пристенного слоя*

$$\delta_л = \alpha\nu / u_*, \tag{16}$$

где α — постоянная.

Выражение (16) получается в результате двух следующих допущений: 1) о постоянстве „пристенного" числа Рейнольдса

$$N = u_{пл}\, \delta_л / \nu, \tag{17}$$

где $u_{пл}$ — скорость на границе пристенного слоя; 2) о наличии в пристенном слое ламинарного движения, для которого можно приближенно принимать

$$\tau = \mu u_{пл} / \delta_л, \tag{18}$$

где τ — касательное напряжение на стенке. Подставляя $u_{пл}$ из (18) в (17), получаем (16).

Опытами Никурадзе ([8]) было установлено, что непосредственно вблизи стенки уравнение (14) переходит в зависимость

$$u / u_* = u_* y / \nu, \tag{19}$$

которая соответствует ламинарному движению в пристенном слое. Тем самым допущение о наличии ламинарного движения в пристенном слое приобрело силу закона, а вместе с тем и полученное из него уравнение (16)**.

---

* Определение Прандтля для пристенного слоя („слой, в котором имеет место ламинарное движение") отличается от нашего определения, данного в начале настоящей статьи.

** Последующие исследователи исходили из существования ламинарного подслоя уже как из экспериментально установленного факта, проверяя точность своих измерений по теоретической кривой ламинарного движения в пристенном слое. Так например, Г. А. Гуржиенко ([12]), исходя из совпадения полученных им вблизи стенки экспериментальных точек с законом ламинарного трения, пришел к выводу о том, что „присутствие стенки весьма мало влияет на показания микронасадки", и не внес в эти показания поправок на близость стенки.

Между тем, как это удалось обнаружить совсем недавно ([9]), Никурадзе при построении графика зависимости $u/u_* = f(u_* y/\nu)$ (график № 23 или табл. № 3 его отчета о гладких трубах) существенно исказил результаты полученных им непосредственно измерений (сведенных в табл. № 2 его отчета). На нашем графике № 2 нанесены как „неисправленные" данные измерений Никурадзе (зачерненные точки), в соответствии с табл. № 2 его отчета, так и „исправленные" данные (незачерненные точки) приведенные в табл. № 3 и на графике № 23 отчета. Запрошенный по этому поводу Л. Прандтль, под руководством которого проводилось исследование Никурадзе, дал следующие объяснение. После того как Никурадзе нанес на график $u/u_* = f(u_* y/\nu)$ данные своих непосредственных измерений и сравнил их с прямой ламинарного закона (19), он убедился, что замеренные им скорости оказались более высокими, чем им следовало бы быть в случае наличия ламинарного движения вблизи стенки. Тогда, больше доверяя гипотезе о ламинарном подслое (гипотеза Прандтля), чем результатам собственных измерений, проведенных в труднейших условиях непосредственной близости к стенке, Никурадзе решил увеличить замеренные значения скоростей таким

Окончательные рекомендуемые нами расчетные зависимости для закона сопротивления и закона распределения скоростей имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}82 \lg \frac{\mathrm{Re}}{100} + 2, \tag{20}$$

$$\frac{u}{u_*} = 5{,}33 \lg \mathrm{Re} \frac{y}{r} - 2. \tag{21}$$

В заключение отметим, что уравнение (13) было получено также П. К. Конаковым ([7]). Однако вывод, предложенный П. К. Конаковым, вызвал возражения со стороны А. Н. Колмогорова ([6]), и в двух более поздних работах ([10,11]) П. К. Конаков дает видоизмененный вывод уравнения (13). Однако этот новый вывод основан на гипотезах, противоречащих опытным данным.

Действительно, с одной стороны, предлагается гипотеза (([11]), стр. 1461)

$$W_\delta / \overline{W} = \mathrm{const}_1, \tag{22}$$

где $\overline{W}$ — средняя (по сечению) скорость в трубе, W_δ — скорость на границе турбулентного ядра. С другой стороны, принимается (([11]), стр. 1467)

$$\frac{\overline{W}}{W_0 - W_\delta} = \mathrm{const}_2, \tag{23}$$

где W_0 — скорость на оси трубы (максимальная скорость).

Из сопоставления (22) и (23) непосредственно следует

$$\overline{W} / W_0 = \mathrm{const}_3, \tag{24}$$

т. е. отношение средней скорости к максимальной должно сохранять постоянную величину.

Как известно, соотношение (24), строго соблюдаемое при ламинарном движении, не имеет вовсе места при турбулентном движении, где отношение средней скорости к максимальной является функцией Re и заметно возрастает с увеличением последнего.

Поступило
8 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Агроскин, Гидравлика, 1944. [2] Н. Е. Жуковский, Теоретические основы воздухоплавания, М., 1925, стр. 201. [3] B. Miller, Chem. and Metall. Eng., **44**, No. 10, Oct. (1937). [4] C. F. Colebrook, Journ. Inst. Civil Eng., No. 4, Febr. (1939). [5] Г. К. Филоненко, Изв. ВТИ, № 10 (1948). [6] А. Н. Колмогоров, ДАН, **52**, № 8 (1946). [7] П. К. Конаков, ДАН, **51**, № 7 (1946). [8] J. Nikuradze, VDI, Forschungsheft 356 (1932); Проблемы турбулентности, Сборн. под ред. М. А. Великанова, М., 1936. [9] B. Miller, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., May (1949). [10] П. К. Конаков, Изв. АН СССР, ОТН, № 7 (1948). [11] П. К. Конаков, там же, № 10 (1949). [12] Г. А. Гурженко, Технические заметки ЦАГИ. № 180. М. (1938).

образом чтобы кривая $u/u_* = f(u_* y/\nu)$ вблизи стенки плавно переходила в прямую ламинарного закона $u/u_* = f u_* y/\nu$. Именно эти „исправленные значения приведены в табл. № 3 отчета Никурадзе и в его известном графике № 23.

Таким образом, зависимости (19) и (18) для пристенного слоя не подтверждаются данными измерений Никурадзе. Тем самым нельзя считать обоснованным и уравнение (16), из которого получены все дальнейшие зависимости школы Кармана—Прандтля.

Из изложенного очевидно, что формула (16) Прандтля не имеет каких-либо преимуществ по сравнению с формулой (11) (в смысле возможности ее обоснования), но вместе с тем приводит к более сложным (но не более точным) зависимостям для коэффициента трения и для закона распределения скоростей.