Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. В. ЛУКЬЯНОВ

ОБ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 21 X 1950)

1. После того как в 1922 г. была опубликована Н. Н. Павловским работа ([1]), в которой описывалось решение плоских гидродинамических задач по методу ЭГДА (электро-гидродинамических аналогий), метод электрических аналогий для решения различных задач, сводящихся к уравнению Лапласа, получил широкое распространение. Рядом авторов был применен метод электрических аналогий для решения задач теплотехники, расчета электрических полей и др. ([2,3]). В работе В. С. Лукошкова ([3]) описывается электрическое моделирование пространственных задач в однородной среде. В работе Б. Ф. Рельтова ([4,5]) описывается моделирование пространственных задач в неоднородной среде с применением смеси порошков графита и мрамора. Однако употребление порошков графита и мрамора дает меньшую точность по сравнению с электролитическим моделированием, в связи с чем желательно распространение электролитического моделирования на решение задач в неоднородной среде ([5]).

Для решения уравнения Лапласа С. А. Гершгориным был предложен, а Л. И. Гутенмахером и другими был развит метод электрического моделирования, в котором непрерывная среда заменялась сеткой электрических сопротивлений ([6,7])*.

Из-за необходимости употребления большого числа элементов на электрических сетках решаются преимущественно плоские задачи. Решение пространственных задач становится довольно громоздким и требует дорогой аппаратуры.

В настоящей статье описывается работа по электролитическому моделированию некоторых пространственных задач для неоднородной среды**. При этом рассматривались задачи, сводящиеся к определению функции u, удовлетворяющей уравнению

$$\operatorname{div}[k(x, y, z)\cdot \operatorname{grad} u] = 0$$

при $k(x, y, z)$ кусочно-постоянном. Было осуществлено моделирование для случая, когда k принимает два значения: $k = \lambda_1 = \text{const}$ для одних (x, y, z) и $k = \lambda_2 = \text{const}$ для других (x, y, z).

2. Пусть в области T_1 $k = \lambda_1 = \text{const}$, в области T_2 $k = \lambda_2 = \text{const}$. Тогда в обеих областях T_1 и T_2 функция u удовлетворяет уравнению

* Кстати отметим, что на том же принципе основаны гидравлические приборы оказавшиеся особенно удобными при решении нестационарных задач.

** Работа выполнена по предложению А. Н. Тихонова.

Лапласа $\Delta u = 0$, на границе областей T_1 и T_2 выполняется условие $\lambda_1 \partial u_1 / \partial n = \lambda_2 \partial u_2 / \partial n$. При электролитическом моделировании функций, удовлетворяющих этим условиям, основной задачей является создание сред с различными электрическими проводимостями: λ_1 в области T_1 и λ_2 в области T_2. При этом к материалам обеих сред предъявляются следующие требования. Во-первых, они должны сохранять неизменными свои электрические и механические свойства в течение длительного времени соприкосновения при условии пропускания через них электрического тока. Во-вторых, необходимо, чтобы они обладали сравнимыми проводимостями λ_1 и λ_2 и чтобы можно было достаточно просто осуществлять заданное соотношение проводимостей. В-третьих, они должны быть достаточно однородными. В-четвертых, должны допускать измерение потенциала в любой точке.

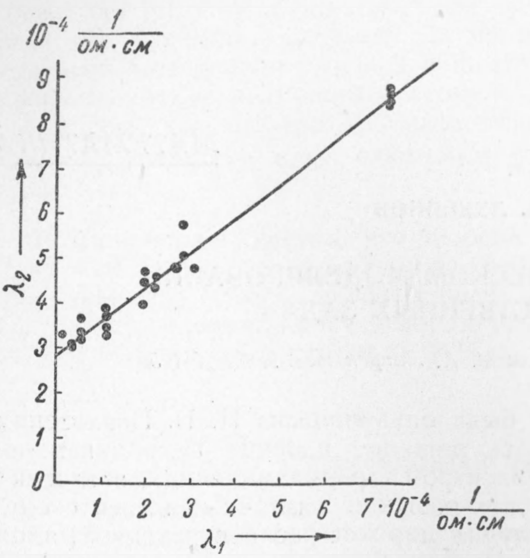

Рис. 1. График зависимости проводимости агар-агара (4%) от проводимости раствора после диффузии при малых концентрациях соли

Учет этих требований привел к выбору электролита очень малых концентраций для моделирования „основной среды“ и агарового студня для моделирования „включений“. Для выполнения первого условия необходимо, чтобы концентрация агар-агара была достаточной для сохранения формы студня (например 4%); далее, студень следует достаточное время выдержать в растворе данной концентрации, чтобы процесс диффузии солей закончился (ускорить этот процесс можно пропусканием через студень постоянного тока). Зависимость проводимости студня λ_2 от проводимости раствора λ_1 после окончания диффузии солей характеризуется наклонной прямой $\Big($пересекающей ось ординат приблизительно в точке 0; $3 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{см} \cdot \text{см}}\Big)$ (рис. 1).

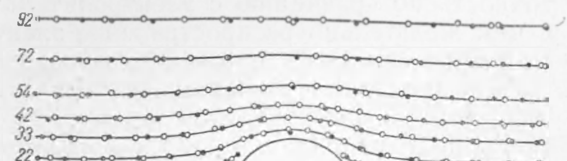

Рис. 2. Возмущение, вносимое в плоское поле шаровой неоднородностью, в плоскости, проходящей через центр сферы. Отношение проводимостей $\lambda_2 : \lambda_1 = 5{,}6$

Требуемое значение проводимости раствора λ_1 можно осуществить добавлением к дестиллированной воде определенного количества раствора KCl. Так как проводимость дестиллированной воды практически стабильна лишь при значениях, бо́льших $1 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{см} \cdot \text{см}}$, а проводимость агарового студня после удаления из него диффундирующих солей при наших измерениях имела значение, близкое к $3\cdot10^{-4}\frac{1}{\text{ом}\cdot\text{см}}$, оказалось возможным осуществить соотношения проводимостей $\lambda_1:\lambda_2$ от 1 : 1 до 1 : 30. Для измерения электрического потенциала применялась такая же установка, как и при моделировании функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа в одной однородной области.

3. Сопоставление результатов, полученных с помощью электролитической ванны, с результатами аналитического расчета возмущения, вносимого в плоское поле шаровой неоднородностью (рис. 2 и 3), показало, что отклонения результатов, полученных с помощью электролитической ванны, как правило, не выходят за пределы точности измерения потенциала. Электрический потенциал при этом измерялся с точностью 0,5% от разности потенциалов между электродами. На рис. 2 приведено распределение эквипотенциальных линий в плоскости, проходящей через центр сферы и параллельной градиенту плоского поля. На рис. 3 приведено распределение эквипотенциальных линий в плоскости, отстоящей от сферы радиуса 51 мм на расстояние 1 мм.

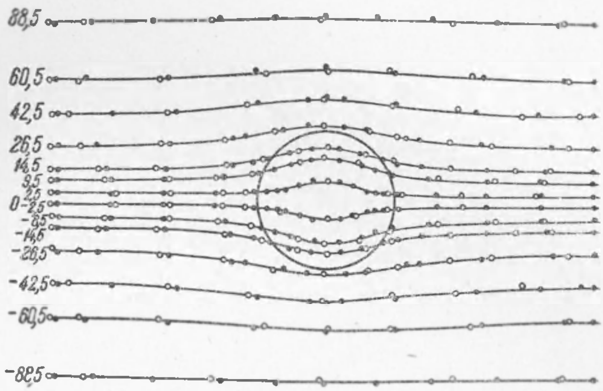

Рис. 3. Возмущение, вносимое в плоское поле шаровой неоднородностью, в плоскости, отстоящей от плоскости, касательной к сфере, на 1 мм. Отношение проводимостей $\lambda_2:\lambda_1 = 28$

Белые точки на рис. 2 и 3 получены с помощью электролитической ванны, черные — аналитическим расчетом. Таким образом, электролитическую ванну можно применять для моделирования некоторых неоднородных пространственных задач.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову, под руководством которого выполнена эта работа.

Поступило
9 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, гл. XIV, 1922, стр. 524—560. [2] А. Н. Ложкин, Сборн. За советское энергооборудование, 1934. [3] В. С. Лукошков, Изв. электропром. слаб. тока, № 10 (1939). [4] Б. Ф. Рельтов, Изв. Н.-и. ин-та гидротехники, **15**, 1 (1935). [5] В. И. Аравин и Н. И. Дружинин, Изв. Всесоюзн. н.-и. ин-та гидротехники им. Б. Е. Веденеева, **40** (1949). [6] С. А. Гершгорин, Журн. прикладн. физ., **6**, в. 3—4, 3 (1929). [7] Л. И. Гутенмахер, Электрические модели.