Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

# О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 X 1950)*

В статье [1] Л. А. Люстерник предложил вариационно-топологический метод для исследования вопроса о собственных элементах оператора $F(x)$, порожденного дифференциалом Фреше функционала $f(x)$. Затем В. И. Соболев [3] показал, что методом Л. А. Люстерника получаются аналогичные результаты для более широкого класса нелинейных операторов $F(x)$. Дальнейшие исследования этого вопроса принадлежат Л. А. Люстернику [2] и Э. С. Цитланадзе [5-7]. Э. С. Цитланадзе, используя теорию категорий и исследуя связь между оператором $F(x)$ и функционалом $f(x)$, обобщил некоторые результаты Л. А. Люстерника и В. И. Соболева и показал, что метод Л. А. Люстерника распространяется на более общие функциональные пространства. Во всех работах [2-7] предполагалось, однако, что оператор $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица, причем доказательства использовали это условие.

В настоящей статье мы показываем, что область применения вариационно-топологического метода Л. А. Люстерника может быть расширена и на тот случай, когда условие Липшица заменяется лишь требованием непрерывности оператора $F(x)$. При этом все теоремы о собственных элементах, доказанные в работах [2-7], сохраняются и в том случае, если отказаться от условия Липшица. Будем предполагать, что функционал $f(x)$ и оператор $F(x)$ заданы в вещественном гильбертовом пространстве $H$ и что область значений $F(x)$ также принадлежит $H$.

Мы будем придерживаться терминологии, предложенной В. В. Немыцким [8]. Об этом необходимо упомянуть потому, что в работах [3-4] слабо непрерывный оператор называется вполне непрерывным, а в работах [5-7] вполне непрерывным оператором называется компактный оператор.

Функционал $f(x)$ (оператор $F(x)$) называется непрерывным в точке $x_0$ (слабо непрерывным в точке $x_0$), если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к $x_0$, т. е. для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \| = 0$ (слабо сходящаяся к $x_0$), $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \| F(x_n) - F(x_0) \| = 0\right)$. В отношении непрерывности справедливо замечание, сделанное в другой работе [9].

Оператор $F(x)$ называется компактным на множестве $E \subset H$, если он преобразует каждую ограниченную часть множества $E$ в компактное множество.

Оператор $F(x)$ называется вполне непрерывным на $E \subset H$, если он непрерывен в каждой точке $E$ и является компактным на $E$.

Отметим, что в гильбертовом пространстве (вообще в регулярном пространстве Банаха) из слабой непрерывности оператора $F(x)$ вытекает его полная непрерывность, но не наоборот.

Пусть $F(x)$ есть оператор, порожденный дифференциалом Фреше функционала $f(x)$, т. е.

$$f(x+h)-f(x)=(F(x),\ h)+\omega(x,\ h),$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\omega(x,\ h)}{\|h\|}=0.$$

Определение. Мы скажем, что остаток $\omega(x, h)$ дифференциала $(F(x), h)$ ограничен в шаре $D(\theta, a)$, если для всех $x$ и $h$, удовлетворяющих условию $\|x\|\leqslant a$, $\|h\|\leqslant a$, имеет место неравенство $|\omega(x, h)|\leqslant C_a=\mathrm{const}$, притом, каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется такое $\delta>0$, что $\frac{|\omega(x,\ h)|}{\|h\|}<\varepsilon$, как только $\|h\|\leqslant\delta$ и $\|x\|\leqslant a$.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор $F(x)$, порожденный дифференциалом $df(x, h)=(F(x), h)$ слабо непрерывного функционала $f(x)$, был слабо непрерывным в шаре $\|x\|\leqslant a$, необходимо и достаточно, чтобы $df(x, h)$ имел в шаре $D(\theta, a)$ ограниченный остаток.*

Заметим, что данная теорема сохраняется, если вместо $H$ рассматривать регулярное пространство Банаха с базисом, и представляет потому обобщение теоремы 2 работы (7).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1°. *$f(x)$ есть слабо непрерывный функционал, который в шаре $\|x\|\leqslant a$ обладает свойствами: $f(-x)=f(x)\geqslant 0$ и из $f(x)=0$ следует $x=\theta$, где $\|\theta\|=0$.*

2°. *Оператор $F(x)$, порожденный дифференциалом функционала $f(x)$, является вполне непрерывным в шаре $\|x\|\leqslant a$, притом из $\|F(x)\|=0$, следует, что $x=\theta$.*

*Тогда уравнение $F(x)=\lambda x$ имеет на любой сфере $\|x\|=r\leqslant a$ не менее счетного числа геометрически различных собственных элементов.*

Отметим, что подобная теорема была доказана Цитланадзе, причем его доказательство использует дополнительное требование, чтобы оператор $F(x)$ удовлетворял условию Липшица. Доказательство данной теоремы, в основном, использует идею и некоторые предложения, принадлежащие Э. С. Цитланадзе. Применение этих теорем к интегральным уравнениям приводит к следующему предложению.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Невырожденное ядро $K(x, y)$ симметрично, все его собственные значения $\lambda_i$ (в смысле теории линейных интегральных уравнений) положительны и*

$$\int_B\int_B K^2(x,\ y)\,dx\,dy<+\infty. \tag{1}$$

2°. *Функция $g(u, x)$ непрерывна для всех действительных и при каждом фиксированном $x\in B$ ($B$ есть ограниченная область $n$-мерного евклидова пространства), измерима в $B$ по $x$ при фиксированных $u$, притом $g(-u, x)=-g(u, x)$ и при $u\neq 0$ почти всюду*

$$g(u,\ x)\neq 0. \tag{2}$$

3°.

$$|g(u,\ x)|\leqslant M|u|. \tag{3}$$

*Тогда уравнение*

$$\mu u(x) = \int_B K(x, y) g(u(y), y) \, dy \equiv \Phi(u) \tag{4}$$

*имеет при всяком положительном $r \leqslant a$ не менее счетного числа попарно линейно независимых собственных функций, принадлежащих $L_2$ и представимых в виде*

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^{(n)}}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)^2} = r \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

*где $\varphi_k$ суть собственные функции ядра $K(x, y)$, соответствующие его собственным числам $\lambda_k$ ($\lambda_{k+1} \geqslant \lambda_k > 0$). Каждая собственная функция $u_n(x)$ отвечает положительному значению параметра $\mu = \frac{1}{r^2} \int_B u_n(x) g(u_n(x), x) \, dx$.*

Отметим, что В. И. Соболев впервые применил вариационно-топологический метод к исследованию уравнения (4); доказанная им теорема ([4]) налагает дополнительные ограничения на функцию $g(u, x)$ и ядро $K(x, y)$ и является поэтому частным случаем данной.

Так как доказательство теоремы 3 опирается на теоремы 1 и 2 настоящей работы и отличается от доказательства, данного В. И. Соболевым, то мы вкратце наметим его. Из условия (3) вытекает (см. ([9])) непрерывность в $L_2$ оператора $hu = g(u(x), x)$, откуда, согласно условию (1), следует полная непрерывность в $L_2$ оператора $\Phi(u)$. Применяя к интегральному оператору $\Phi(u)$ теорему разложения по $\varphi_k(x)$, мы находим, что всякая собственная функция $v(x)$ уравнения (4), отвечающая значению $\mu \neq 0$, представима в виде (5), где $\xi_k$ дают решение бесконечной системы

$$\mu \xi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_B g\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x), x\right) \varphi_i(x) \, dx \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Обратно, каково бы ни было действительное число $\mu$, всякое решение системы (6), принадлежащее $l_2$, определяет функцию $v(x)$ вида (5), принадлежащую пространству $L_2$ и являющуюся собственной функцией уравнения (4). Записав систему (6) в виде

$$\mu \xi = F(\xi), \qquad \xi \in l_2, \tag{7}$$

где $F(\xi)$ есть оператор, действующий в $l_2$, мы заключаем, что для исследования уравнения (4) достаточно исследовать уравнение (7).

Рассмотрим теперь функционал, заданный в пространстве $l_2$:

$$f(\xi) = \int_B G\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x), x\right) dx, \quad \text{где} \quad G(u, x) = \int_0^u g(v, x) \, dv. \tag{8}$$

Используя некоторые преобразования и оценки, примененные при доказательстве леммы 2 работы ([10]), мы доказываем, что $f(\xi)$ есть слабо непрерывный функционал, имеющий дифференциал Фреше $df(\xi, \eta) = (F(\xi), \eta)$ с ограниченным остатком в шаре $D(\theta, a)$, где $F(\xi)$ есть оператор, записанный в правой части уравнения (7). Далее, из условия (2), во-первых, следует, что $f(-\xi) = f(\xi)$, а во-вторых, путем простого преобразования находим, что если $\|\xi\| \neq 0$, то $f(\xi) > 0$.

Наконец, из условия (2) вытекает, что $(F(\xi), \xi) > 0$, если $\|\xi\| \neq 0$, а значит, если $\|\xi\| \neq 0$, то $\|F(\xi)\| > 0$. Таким образом, для уравнения (7) выполнены все условия теоремы 2. Согласно предыдущему, раз теорема 2 справедлива для уравнения (7), то она справедлива и для уравнения (4), т. е. существует не менее счетного числа решений вида (5). Согласно условию (2) мы вправе отождествлять решения, отличающиеся знаком. Отсюда и из (5) вытекает, что решения $u_n(x)$ попарно линейно независимы. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 3 сохраняется, если правая часть неравенства (3) содержит еще слагаемые вида $b(x)|u|^p$, где $0 < p < 1$ и $b(x) \in L_{\frac{2}{1-p}}$.

В заключение отметим, что теорема 3 сохраняется для уравнения $F(x) = \lambda\Phi(x)$ [7] в регулярном пространстве Банаха с базисом, если оператор $\Phi(x)$, порожденный дифференциалом функционала $\varphi(x) = \|x\|$, удовлетворяет условию Липшица и имеет в $D(\theta, a)$ обратный непрерывный оператор $\Phi^{-1}(x)$.

Поступило
27 IX 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 257 (1939). [2] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та Стеклова АН СССР, 19 (1947). [3] В. И. Соболев, ДАН, 31, № 8 (1941). [4] В. И. Соболев, ДАН, 71, № 5 (1950). [5] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 53, № 4 (1946); ДАН, 56, № 1 (1947); ДАН, 57, № 9 (1947); ДАН, 71, № 3 (1950). [6] Э. С. Цитланадзе, Тр. Тбилисск. пед. ин-та, 4, 17 (1947); 5, 7 (1948). [7] Э. С. Цитланадзе, Усп. матем. наук, 5, 4 (38), 141 (1950). [8] В. В. Немыцкий, там же, в. 1, 141 (1936). [9] М. М. Вайнберг, ДАН, 73, № 2 (1950). [10] М. М. Вайнберг, Матем. сборн., 26 (68), № 3, 365 (1950).