Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. БОЛТЯНСКИЙ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ДВУМЕРНЫХ КОМПАКТОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 X 1950)

Пусть Φ — произвольный компакт, $\Sigma = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$ — конечное замкнутое покрытие этого компакта. Элемент F_j назовем **соседом** элемента F_i, если $F_i \cap F_j \neq 0$. Число соседей элемента F_i обозначим через n_i, а наибольшее из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ назовем **плотностью покрытия** Σ. **Плотностью компакта** Φ назовем наименьшее из таких натуральных чисел n, что существует сколь угодно мелкое замкнутое покрытие компакта Φ, имеющее плотность n.

Вопрос о связи размерности и плотности рассматривался Л. А. Тумаркиным для одномерных компактов; им было доказано, что плотность любого одномерного компакта равна 2 или 3*. Что касается двумерных компактов, то в [1,2] рассматривался вопрос о плотности квадрата. Однако полного решения (для произвольных замкнутых покрытий) в этих работах нет. За несколько дней до получения мной публикуемого результата О. В. Локуциевский сообщил мне, что им получено полное доказательство того, что плотность квадрата равна шести.

Теорема. *Плотность любого двумерного компакта не может быть меньше шести.*

Лемма. *Пусть в некотором евклидовом пространстве задан двумерный прямолинейный симплициальный комплекс K, удовлетворяющий следующим условиям:* а) *диаметры симплексов комплекса K меньше $\varepsilon/3$;* б) *к каждой вершине комплекса K примыкает не более пяти одномерных симплексов;* в) *если в комплекс K входят три одномерные симплекса, составляющие контур некоторого треугольника, то входит и этот треугольник;* г) *в комплексе K фиксирован одномерный цикл $z^1 \bmod m$, гомологичный нулю в K;* д) *к каждому ребру (одномерному симплексу), не входящему в цикл z^1, примыкает не менее двух треугольников комплекса K;* е) *не существует собственного подкомплекса комплекса K, удовлетворяющего перечисленным условиям. Тогда комплекс K расположен в ε-окрестности цикла z^1.*

Доказательство леммы. Пусть a — произвольная вершина комплекса K, звезда $З$ которой не имеет общих точек с z^1, и Π — одномерный комплекс, составленный из всех симплексов комплекса $З$, которые не примыкают к вершине a. Из условий б) и д) легко следует, что комплекс Π может быть либо пятиугольником, в котором могут быть проведены несколько диагоналей (пятиугольник про-

* Доклад на топологической конференции.

странственный, диагонали не пересекаются), либо четырехугольником, в котором также могут быть проведены одна или обе диагонали, либо треугольником, либо, наконец, одним из комплексов, изображенных на рис. 1.

Пусть П представляет собой пятиугольник, в котором из некоторой вершины проведены обе диагонали (рис. 2). Пусть, далее, x^2 — цепь $\bmod m$, удовлетворяющая условию $\Delta x^2 = z^1$, а α, β и γ — коэффициенты, с которыми треугольники abc_1, abc_2, abc_3 входят в x^2. Обозначим через $\Delta(abc_1c_2)$ цепь, составленную из треугольников bc_1c_2, ac_1c_2, abc_2, abc_1, ориентированных так, чтобы они составили границу трехмерного симплекса abc_1c_2 (сам этот симплекс в комплекс K не входит); аналогичны обозначения $\Delta(abc_2c_3)$, $\Delta(abc_3c_4)$. Тогда цепь

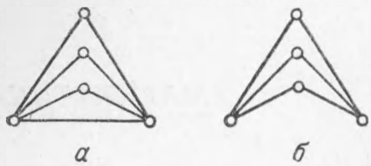

Рис. 1

$$\overset{*}{x}{}^2 = x^2 + \alpha\Delta(abc_1c_2) + (\alpha+\beta)\Delta(abc_2c_3) + (\alpha+\beta+\gamma)\ \Delta\ (abc_3c_4)$$ также

удовлетворяет условию $\Delta\overset{*}{x}{}^2 = z^1$ и в эту цепь треугольники abc_1, abc_2, abc_3, а следовательно и abc_4, не входят. Удалив из K указанные четыре треугольника и ребро ab, мы получим комплекс, удовлетворяющий условиям а), б), в), г); если условие д) не выполняется, например, к ребру ef примыкает лишь один треугольник efg, то выбросив из K ребро ef и треугольник efg, мы снова получим комплекс, удовлетворяющий условиям а), б), в), г). После конечного числа таких шагов мы получим, наконец, комплекс, удовлетворяющий и условию д) и являющийся собственным подкомплексом комплекса K, что противоречит условию е).

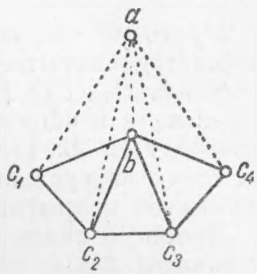

Рис. 2

Таким образом, если комплекс K имеет вид пятиугольника с диагоналями, то из каждой вершины может быть проведено не более одной диагонали. Аналогичными рассуждениями показывается, что П не может иметь вид пятиугольника или четырехугольника, если в них проведена хотя бы одна диагональ, а также, что П не может быть треугольником или иметь вид, изображенный на рис. 1a.

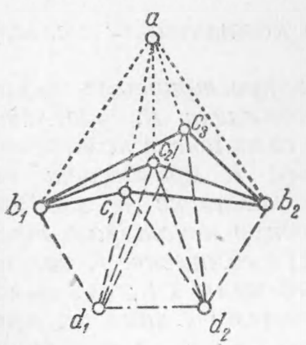

Рис. 3

Пусть, наконец, комплекс П имеет вид рис. 1б и $b_1c_1d_1$ — треугольник, примыкающий к ребру b_1c_1 и отличный от ab_1c_1 (рис. 3); к ребру b_1c_1 примыкают по крайней мере два треугольника, ибо, по предположению, звезда вершины a не имеет общих точек с z^1. Точка d_1 не может совпадать с c_2, c_3, b_2, ибо иначе изменился бы комплекс П. Но тогда от вершины b_1 отходит уже пять ребер, и потому треугольниками, примыкающими к ребрам b_1c_2, b_1c_3, могут быть только $b_1c_2d_1$, $b_1c_3d_1$. Аналогично, к ребрам b_2c_1, b_2c_2, b_2c_3 примыкают три треугольника $b_2c_1d_2$, $b_2c_2d_2$, $b_2c_3d_2$. Точка d_1 может совпасть с d_2; если же эти точки не совпадают, то комплексу K принадлежат ребро d_1d_2 и треугольники $d_1d_2c_1$, $d_1d_2c_2$, $d_1d_2c_3$ (так как из вершин c_1, c_2, c_3 уже исходит по пять ребер). Вычитая из цепи x^2, удовлетворяющей условию $\Delta x^2 = z^1$, взятые с некоторыми коэффициентами поверхности многогранников $ab_1c_1b_2c_2d_1d_2$, $ab_1c_2b_2c_3d_1d_2$, мы сможем добиться того, что в цепь, осуществляющую гомологию $z^1 \sim 0$, треугольники ab_1c_3, ab_2c_3,

ab_1c_1, ab_2c_1, а следовательно и ab_1c_2, ab_2c_2, входить не будут. Это снова противоречит сформулированным выше условиям.

Итак, если звезда $З$ некоторой вершины комплекса K не имеет общих точек с циклом z^1, то $З$ состоит из четырех или пяти треугольников, примыкающих друг к другу в циклическом порядке. Отсюда следует, что от каждой вершины комплекса K можно подойти к циклу z^1 по ломаной, состоящей самое большее из трех ребер комплекса K. Действительно, пусть существует вершина a, не удовлетворяющая этому условию. Звезда этой вершины состоит из четырех или пяти циклически расположенных треугольников. К каждой стороне получившегося четырех- или пятиугольника примыкает еще один треугольник (рис. 4). Если третьи вершины c_1 и c_2 двух соседних из этих треугольников не совпадают, то в комплексе K имеется ребро c_1c_2, ибо от вершины b_2 уже отходят пять ребер. Таким образом, вершины c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 соединены пятиугольным контуром $c_1c_2c_3c_4c_5$, в котором, однако, некоторые вершины могут совпасть. Теперь от каждой из вершин c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 уже отходит, по крайней мере, по четыре ребра, и потому треугольники, примыкающие к ребрам c_1c_2, c_2c_3, c_3c_4, c_4c_5, c_5c_1, должны сходиться в одной вершине. Мы получили замкнутый цикл, который можно выбросить из K, что противоречит свойству e). Итак, каждая вершина комплекса K — а потому и весь комплекс K — лежит, в силу условия а), в ε-окрестности цикла z^1.

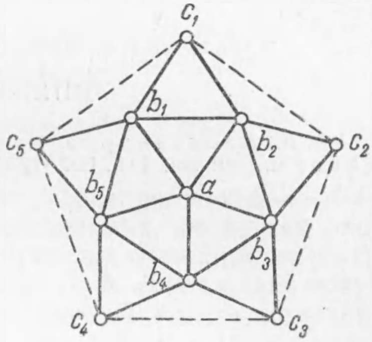

Рис. 4

Доказательство теоремы. Пусть плотность компакта Φ меньше шести. Предположим, что, вопреки доказываемой теореме, $\dim \Phi \geqslant 2$. Компакт Φ конечномерен, ибо существуют сколь угодно мелкие его покрытия плотности пять, т. е. кратности не выше шести. Выберем из Φ произвольное двумерное замкнутое подмножество Ψ. Плотность компакта Ψ также меньше шести. Пусть Z^1—существенный одномерный цикл компакта Ψ по переменному модулю, гомологичный нулю в Ψ, H — носитель этого цикла, в котором он негомологичен нулю. Компакт Ψ предположим расположенным в евклидовом пространстве R^{11}, где и производятся дальнейшие построения. Так как $Z^1 \not\sim 0$ в H, то при некотором $\varepsilon > 0$ $Z^1 \not\sim 0$ в 2ε-окрестности компакта H. Рассмотрим $\frac{\varepsilon}{12}$-покрытие Ψ плотности не выше пяти и пусть N — нерв этого покрытия. Вершины нерва выберем находящимися в общем положении в R^{11} и не далее, чем на $\frac{\varepsilon}{12}$ от соответствующих элементов покрытия. Из каждой вершины комплекса N исходит не более пяти ребер, поэтому N не более, чем пятимерен, и реализуется в R^{11} без особенностей. Степень мелкости комплекса N меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Переведем Z^1 в последовательность симплициальных циклов $\dot{z}_k$ комплекса N, гомологичных в нем нулю. Нетрудно видеть, что этого можно добиться $\frac{2}{3}\varepsilon$-сдвигом цикла Z^1, так что циклы $\dot{z}_k$ лежат в ε-окрестности компакта H, и потому среди них найдется негомологичный нулю в своей ε-окрестности цикл z^1 по некоторому модулю m. Напомним, что $z^1 \sim 0$ в N. Пусть x^2 — такая цепь $\mathrm{mod}\, m$ комплекса N, что $\Delta x^2 = z^1$, а L — замкнутый двумерный подкомплекс комплекса N, составленный из всех треугольников, входящих в x^2 с отличными от нуля коэффициентами, а также их сторон и вершин. L удовлетворяет условиям а), б), г), д); добавляя, если нужно, к комплексу L треугольники, контуры которых входят в L, добьемся выполнения условия в). Из конечного комплекса L можно выбрать минимальный подкомплекс K, удовлетворяющий условиям а) — д), т. е. также и условию е). Согласно лемме, комплекс K расположен в ε-окрестности цикла z^1, так что $z^1 \sim 0$ в своей ε-окрестности. Это, однако, противоречит выбору цикла z^1. Теорема доказана.

Следствие. *Плотность квадрата равна шести.*

Действительно, согласно доказанной теореме, плотность квадрата не меньше шести. Замощение плоскости правильными шестиугольниками позволяет получить сколь угодно мелкое покрытие квадрата, имеющее плотность шесть.

Поступило
6 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, Матем. сборн., нов. сер., **2**:2, 307 (1937). [2] Л. М. Лихтенбаум, там же, **1**:6, 907 (1936).