Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

ФИЗИКА

Д. Д. ИВАНЕНКО и А. М. БРОДСКИЙ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ЛУЧИСТОЕ ТРЕНИЕ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 3 X 1950)

Одним из авторов ранее [1] было качественно показано, что наряду с электромагнитным и мезонным должно также существовать гравитационное лучистое трение, которое следует учитывать в уравнениях движения отдельной частицы. Развивая указанные соображения, мы подсчитали в рамках классической теории торможение, вызываемое излучением гравитационных волн, для точечной частицы в приближении, которое можно назвать в выясненном ниже смысле полурелятивистским. Проведение подобного расчета представляет интерес для общей теории полей и частиц.

В качестве уравнения движения частицы берется уравнение геодезической линии в пространстве, искривленном собственным гравитационным полем. Это поле считается слабым, допускающим использование уравнений Эйнштейна в линейном приближении; рассмотрение ведется в геодезической нормальной системе координат с началом, совпадающим с положением частицы в некоторый момент. Допустимость этих предпосылок для реализуемых случаев будет рассмотрена ниже.

Малые добавки $h_{\alpha\beta}(x)$ к галилеевым значениям метрического тензора определяются уравнениями

$$\square \psi^{\alpha}_{\beta} = -\frac{16\pi k}{c^4} t^{\alpha}_{\beta}, \tag{1}$$

где $h^{\alpha}_{\beta} = \psi^{\alpha}_{\beta} - {}^1/_2\, \delta^{\alpha}_{\beta} \psi^{\gamma}_{\gamma}$, с нормировочным условием типа Гильберта — Лоренца $\partial \psi^{\beta}_{\alpha} / \partial x^{\alpha} = 0$ (по одинаковым индексам производится суммирование).

При этом t^{α}_{β} полагаются равными тензору энергии:

$$t^{\alpha}_{\beta} = m_0 c^2 u^{\alpha} u_{\beta} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \delta(x^{\gamma} - x^{\gamma}_1(t)),$$

где $x^{\gamma}_1(t)$ — координата частицы, m_0 — собственная масса, k — ньютоновская гравитационная постоянная, $u^{\alpha} = dx^{\alpha} / i\, ds$ и

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} + h_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}.$$

Как видно из рассмотрения используемого ниже решения (3), благодаря особенностям данной задачи мы можем не включать в нашем приближении в уравнения, определяющие пространственные компоненты ψ^{α}_{β}, квадратов производных от гравитационных потенциалов (см., например, [2]).

Вместо того, чтобы исходить только из уравнений поля, мы использовали в правой части (1) выражение, взятое из специальной теории относительности. Это представляет собой применение своеобразного последовательного приближения, которое оказывается пригодным, так как мы ведем рассмотрение в пространстве, мало отличающемся от псевдоевклидова.

По этой же причине мы можем вообще говорить о слабом гравитационном поле, а также приближенно вводить понятие вектора в его обычном смысле, придавать x^1, x^2, x^3 значение пространственных декартовых координат и $t = x^0 / c$ значение времени. Метод последовательных приближений применялся раньше [2-4] с более общей целью получения уравнений движения системы типа ньютоновских из уравнений гравитационного поля.

Обоснование выбора в римановом пространстве общей теории относительности геодезической нормальной системы координат с галилеевыми значениями метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x^{\gamma})$ при $x^{\gamma} = 0$, которая, как мы считаем, более всего приближается к лоренцевой системе отсчета, было указано Биркхофом [5]. Как это следует уже из геометрического смысла геодезических координат, используемое нами приближение будет верным, если частица не выйдет за время наблюдения из ограниченной области трехмерного пространства. Условия малости добавок $h_{\alpha\beta}(x)$ к $g_{\alpha\beta}(0)$ при $x^{\gamma} \neq 0$, а следовательно, и условия малости гравитационных эффектов запишутся в виде неравенств $R_{\alpha\beta} l^2 < 1$, где $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи, а l — линейный размер рассматриваемой части трехмерного пространства. Приведенное неравенство следует уже из соображений размерности; его можно получить, рассмотрев разложение $g_{\alpha\beta}(x)$ в ряд Маклорена. Так как наибольшее из значений $R_{\alpha\beta}$ по порядку величины равно $\frac{k}{c^4} t_{00} = \frac{k\rho}{c^2}$, где ρ — плотность массы, то наше условие можно переписать так: $l < c / \sqrt{k\rho}$.

Для элементарных частиц имеет некоторый смысл в духе полевой теории массы заменить ρ через m / r_g^3, где r_g так называемый гравитационный радиус. Характерно, что в последнем случае особенно ясно выступает необходимость проведения при окончательном рассмотрении квантовомеханической трактовки.

Как нетрудно видеть, любое решение (1) $\psi^{\alpha}_{\beta}(x)$ может быть изменено прибавлением выражения вида $- A^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\gamma} - \psi^{\alpha}_{\beta}(0)$, где $A^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\psi^{\alpha}_{\beta}(0)$ — постоянные в данной системе координат величины, подобранные так, чтобы $\left.\frac{\partial h^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right|_0 = 0$ и $h^{\alpha}_{\beta}(0) = 0$. Очевидно, что эти дополнительные слагаемые не нарушат нормировочного условия. Таким образом, мы действительно можем вести расчет в нормальной системе координат и пользоваться решениями уравнений (1). В наших последующих вычислениях члены с $A^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\gamma}$ и $\psi^{\alpha}_{\beta}(0)$ уничтожатся, и поэтому для сокращения в дальнейшем они не учитываются.

После несложных преобразований из уравнения геодезической линии:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \Gamma^{i}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt} + \frac{d^2 s / dt^2}{ds / dt} \frac{dx^i}{dt},$$

$$0 = - \Gamma^{0}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt} + c \frac{d^2 s / dt^2}{ds / dt}$$

получаем с принятой точностью уравнение движения:

$$m_0 \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -m_0 c^2 \left\{ \frac{d\bar{h}_0}{c\,dt} - \frac{1}{2}\operatorname{grad} h_{00} + \frac{1}{2}\frac{\bar{v}}{c^2}\frac{\partial h_{00}}{\partial t} + \right.$$

$$+ 2\frac{v^i}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{d\bar{h}_i}{dt} - \frac{1}{2}\operatorname{grad} h_{0i} + \frac{\bar{v}}{2c}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\right) +$$

$$\left. + \frac{v^i v^j}{c^2}\left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\operatorname{grad} h_{ij} + \frac{\partial h_{0j}}{\partial x^i}\frac{\bar{v}}{c} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}\frac{\bar{v}}{2c^2}\right)\right\}. \tag{2}$$

Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — значения 1, 2, 3. Для сокращения использована символика трехмерного векторного анализа и введено обозначение $\bar{h}_\alpha = h^l_\alpha e_l$, где e_i — постоянные величины, которые можно приближенно интерпретировать как трехмерные орты.

Таким образом, теперь, как и в аналогичной задаче электродинамики, мы обладаем уравнением движения (2) и волновыми уравнениями (1) для потенциалов собственного поля частицы. Используя упомянутую аналогию, следует взять, подобно соответствующему расчету Лоренца, для подстановки в (2) решение уравнений (1) в виде запаздывающих потенциалов (выполнимость нормировочного условия была ранее показана Эйнштейном), разложить по $1/c$ и отбросить расходящиеся члены, связанные с полевой гравитационной массой. Вычисление несколько упрощается тем, что, как следует уже из качественных соображений, в выражение для силы гравитационного лучистого трения должны входить только члены с $\frac{1}{c^3}, \frac{1}{c^5}, \ldots, \frac{1}{c^{2n+1}}$, где n — целое число.

Более просто тот же конечный результат получается методом Вентцеля — Дирака — Соколова [6], использовавших полуразность опережающих и запаздывающих электромагнитных потенциалов, что автоматически исключает расходящиеся члены в разложении по $1/c$. Применяя этот метод электродинамики для гравитации, берем:

$$h^\alpha_\beta = \frac{2m_0 k}{c^2}\int \frac{u^\alpha u_\beta + 1/2\,\delta^\alpha_\beta}{R(t')}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right) - \delta\left(t'-t-\frac{R}{c}\right)\right\}dt' =$$

$$= -\frac{2m_0 k}{c^3}\left\{2\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(u^\alpha u_\beta + \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left[R^2\left(u^\alpha u_\beta + \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{5!\,c^4}\frac{\partial^5}{\partial t^5}\left[R^4\left(u^\alpha u_\beta + \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] + \ldots\right\}. \tag{3}$$

Здесь $R = |\bar{r} - \bar{r}_1(t)|$, где $\bar{r}_1(t)$ — текущий радиус-вектор частицы. После подстановки h^α_β в (2), где можно положить $R=0$ и $\frac{\partial R}{\partial t} = -\bar{v}(t)$, получаем искомое уравнение

$$m_0\frac{d\bar{v}}{dt} = -11\frac{m_0^2 k}{c^3}\left[\frac{1}{3}\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} + \frac{1}{6}\frac{v^2}{c^2}\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} + \frac{1}{c^2}\left(\bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt}\right)\frac{d\bar{v}}{dt} + \ldots\right].$$

Здесь не записаны члены, содержащие $1/c^7$ или высшие степени $1/c$, что побуждает назвать расчет полурелятивистским.

Если частица движется без ускорения, то полученное выражение после усреднения по времени не приводит к излучению энергии, так как $\bar{v}\frac{d\bar{p}}{dt}$ сводится к полным производным; так например, $\bar{v}\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} + \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2$. Появление в выражении для излучения энергии точечной частицей члена с $\frac{1}{c^3}$ при $\frac{d\bar{v}}{dt} \neq 0$ не противоречит известной формуле для излучения гравитационной энергии системой, в которой содержится лишь квадрупольный член, пропорциональный $1/c^5$. Как и в случае излучения электромагнитной энергии движущимся электроном, возникновение при ускорении дипольного члена, пропорционального $1/c^3$, связано с тем, что разложение на дипольные, квадрупольные и т. д. слагаемые не является инвариантным. Однако следует отметить существенное обстоятельство: если сразу интегрировать уравнение движения точки-частицы с силой торможения, то появляются решения с $d\bar{v}/dt \neq 0$. Иначе, факт наличия собственного гравитационного поля вновь ставит вопрос — возможно ли в принципе, в рамках общей теории относительности, выбрать систему отсчета, в которой ускорение тела равнялось бы нулю при скорости $\bar{v} \neq 0$. Ситуация здесь полностью аналогична проблеме самоускоряющегося в классической теории электрона Дирака.

В заключение отметим, что наш подход к задачам гравитации, основанный на уравнениях слабого поля, позволяет поставить также еще ряд задач, как например, проблему гравитационного вакуума. С другой стороны, общая нелинейная теория гравитационного поля также должна привести к соответствующей силе лучистого трения.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 17 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Иваненко, Усп. физ. наук, 32, № 2, 3 (1947); Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, Классическая теория поля, М., 1949, стр. 430; Вестн. МГУ (1948). [2] В. А. Фок, ЖЭТФ, 9, 375 (1939). [3] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffman, Ann. Math., 39, 65 (1938); A. Einstein and L. Infeld, Ann. Math., 41, 455 (1940); П. Бергман, Введение в теорию относительности, 1947, стр. 298. [4] Н. М. Петрова, ЖЭТФ, 19, 989 (1949). [5] G. D. Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Cambridge Mass., 1923, p. 124; Л. Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., 1948. [6] А. А. Соколов, ЖЭТФ, 18, 280 (1948).