Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

О ВЛИЯНИИ УКЛОНА ВОДОУПОРА И ИНФИЛЬТРАЦИИ НА НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

1. Рассмотрим такую задачу. Водоупор имеет уклон (рис. 1)

$$i_1 = \operatorname{tg}\alpha$$

(угол α считается малым).

Поверхность грунтовых вод в начальный момент времени представляет прямую с малым уклоном i_2:

$$y = H_0 + i_2 x, \quad i_2 = \operatorname{tg}\beta.$$

В канале все время поддерживается уровень воды $H_0 + H_1$.

Имеется инфильтрация — выпадение осадков или просачивание воды после полива или просачивание весенних вод и т. д. Обозначим через w_0 интенсивность инфильтрации, т. е. количество осадков, выпадающее в единицу времени на единицу площади. Эта величина имеет размерность скорости (м^3 / м^2 сутки = м / сутки).

В такой постановке нам нужно решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{kh}{m}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{ki_1}{m}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w_0}{m}$$

(k — коэффициент фильтрации; m — недостаток насыщения; h — среднее значение высоты воды от водоупора, можно считать $h = H_0 + H_1$; $H(x, t)$ — высота грунтовых вод, отсчитываемая от водоупора) при условиях

$$H(x, 0) = H_0 + i_2 x;$$

$$H(0, t) = H_0 + H_1.$$

Это решение имеет вид:

$$H(x,t) = H_0 + i_2 x + \frac{w_0 - ki_1 i_2}{m} t +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[H_1 - \frac{w_0 - ki_1 i_2}{m}\left(t - \frac{mx}{ki_1}\right)\right][1 - \Phi(\xi)] +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{i_1 x/h}\left[H_1 - \frac{w_0 - ki_1 i_2}{m}\left(t + \frac{mx}{ki_1}\right)\right][1 - \Phi(\eta)]. \tag{1}$$

При этом

$$\xi = \frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kht}} - \frac{i_1}{2}\sqrt{\frac{kt}{mh}}, \quad \eta = \frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kht}} + \frac{i_1}{2}\sqrt{\frac{kt}{mh}}. \tag{2}$$

Заметим, что предельный случай $i_1 = 0$ не получается сразу из предыдущей формулы. После перехода к пределу $i_1 = 0$ получим

$$H(x, t) = H_0 + i_2 x + \frac{w_0}{m} t +$$

$$+ \left[H_1 - \frac{w_0}{m}\left(t + \frac{mx^2}{2kh}\right)\right]\left[1 - \Phi\left(\frac{x\sqrt{m}}{\sqrt{2kht}}\right)\right] + \frac{w_0 x \sqrt{t}}{\sqrt{kmh\pi}} e^{-x^2 m/4kht}.$$

Отметим, что в наших формулах i_1 и i_2 положительны в случае обратного уклона, изображенного на рис. 1, и отрицательны в случае прямого уклона.

2. Будем считать, что при поливе происходит просачивание воды и выпадение ее на свободную поверхность грунтовых вод с постоянной скоростью ε в течение промежутка времени $0 < t < T$, затем полив прекращается. Другими словами,

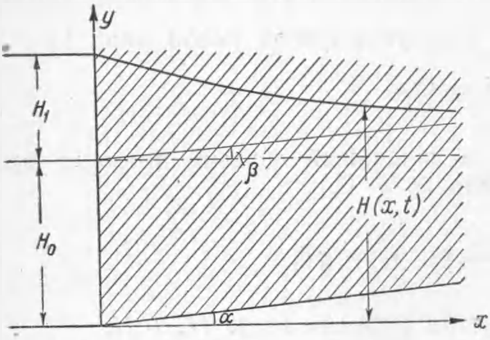

Рис. 1

$$w_0 = \begin{cases} \varepsilon, & 0 < t < T; \\ 0, & T < t. \end{cases}$$

Предположим, что $H_1 = 0$, т. е. подъема воды в канале нет.

При этих условиях решение поставленной задачи имеет различный вид для двух рассматриваемых промежутков времени.

А именно, при $0 < t < T$

$$H(x, t) = H_0 + i_2 x +$$

$$+ \frac{\varepsilon - k i_1 i_2}{m}\left\{t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{mx}{ki_1}\right)[1 - \Phi(\xi)] - \frac{1}{2} e^{i_1 x/h}\left(t + \frac{mx}{ki_1}\right)[1 - \Phi(\eta)]\right\} \tag{3}$$

(ξ, η имеют значения (2)).

При $t > T$ мы получим более сложную формулу, а именно, к написанным в предыдущем равенстве членам нужно прибавить следующие:

$$\frac{\varepsilon}{2m}\left\{\left(t - T - \frac{mx}{ki_1}\right)[1 - \Phi(\xi_1)] + e^{i_1 x/h}\left(t - T + \frac{mx}{ki_1}\right)[1 - \Phi(\eta_1)]\right\},$$

где

$$\xi_1 = \frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kh(t-T)}} - \frac{i_1}{2}\sqrt{\frac{k(t-T)}{mh}}, \quad \eta_1 = \frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kh(t-T)}} + \frac{i_1}{2}\sqrt{\frac{k(t-T)}{mh}}. \tag{4}$$

Кроме того, в формуле (3) нужно заменить слагаемое $\varepsilon t / m$ постоянным числом $\varepsilon T / m$.

Таким образом получим, что для $t > T$

$$H(x, t) = H_0 + i_2 x + \frac{\varepsilon T}{m} - \frac{k i_1 i_2}{m} t -$$

$$- \frac{\varepsilon - k i_1 i_2}{2m} \left\{ \left(t - \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\xi)] + e^{i_1 x/h} \left(t + \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\eta)] \right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2m} \left\{ \left(t - T - \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\xi_1)] + e^{-i_1 x/h} \left(t - T + \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\eta_1)] \right\}, \tag{5}$$

где ξ, η имеют значения (2), ξ_1, η_1 — значения (4).

Если в момент времени $T_1 > T$ начинается новый полив с интенсивностью ε_1, то для $t > T_1$ формула (5) заменяется другой, в которую вместо $\frac{\varepsilon T}{m}$ будет входить $\frac{\varepsilon(t+T)}{m}$ и, кроме того, добавится слагаемое:

$$- \frac{\varepsilon_1 - k i_1 i_2}{2m} \left\{ \left(t - T_1 - \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\xi_2)] + e^{i_1 x/h} \left(t - T_1 + \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\eta_2)] \right\},$$

где

$$\xi_2 = \frac{x \sqrt{m}}{2 \sqrt{kh(t - T_1)}} - \frac{i_1}{2} \sqrt{\frac{k(t - T_1)}{mh}},$$

$$\eta_2 = \frac{x \sqrt{m}}{2 \sqrt{kh(t - T_1)}} + \frac{i_1}{2} \sqrt{\frac{k(t - T_1)}{mh}}.$$

Если при $t = T_2$ второй полив окончился, то в формуле для $H(x, t)$ нужно заменить $\frac{\varepsilon(T+t)}{m}$ величиной $\frac{\varepsilon T_1}{m}$ и добавить слагаемое

$$\frac{\varepsilon_1}{2m} \left\{ \left(t - T_2 - \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\xi_3)] + e^{i_1 x/h} \left(t - T_2 + \frac{mx}{k i_1}\right) [1 - \Phi(\eta_3)] \right\},$$

$$\xi_3 = \frac{x \sqrt{m}}{2 \sqrt{kh(t - T_2)}} - \frac{i_1}{2} \sqrt{\frac{k(t - T_2)}{mh}}, \quad \eta_3 = \frac{x \sqrt{m}}{2 \sqrt{kh(t - T_2)}} + \frac{i_1}{2} \sqrt{\frac{k(t - T_2)}{mh}}$$

(для $t > T_2$).

3. Рассмотрим еще такую задачу. При горизонтальном водоупоре имеем инфильтрацию $w = \varepsilon$ на промежутке $-R < x < R$, которая продолжается при $0 \leqslant t \leqslant T$. Для этого промежутка времени будем иметь, полагая $a = kh/m$:

при $-R < x < R$:

$$H_1(x, t) = - \frac{\varepsilon}{2m} \left\{ \left(t + \frac{(R-x)^2}{2a}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{R-x}{2\sqrt{at}}\right)\right] - \right.$$

$$- \frac{R-x}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(R-x)^2/4at} + \left(t + \frac{(R+x)^2}{2a}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{R+x}{2\sqrt{at}}\right)\right] -$$

$$\left. - \frac{R+x}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(R+x)^2/4at} \right\} + \frac{\varepsilon}{m} t;$$

для $|x| > R$:

$$H_2(x, t) = \frac{\varepsilon}{2m} \left\{ \left(t + \frac{(R-x)^2}{2a}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{x-R}{2\sqrt{at}}\right)\right] - \right.$$

$$- \frac{x-R}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(R-x)^2/4at} - \left(t + \frac{(R+x)^2}{2a}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{R+x}{2\sqrt{at}}\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{R+x}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(R+x)^2/4at} \right\}.$$

Если инфильтрация прекращается при $t = T$, то для $t > T$ будем иметь:

при $|x| < R$:

$$H(x, t) = H_1(x, t) + \frac{\varepsilon}{m}(T - t) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2m}\left\{\left(t - T + \frac{(R - x)^2}{2a}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{R - x}{2\sqrt{a(t - T)}}\right) -\right.\right.$$

$$- \frac{R - x}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{t - T}{\pi}}\, e^{-(R-x)^2/4a(t-T)} + \left(t - T + \frac{(R + x)^2}{2a}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{R + x}{2\sqrt{a(t - T)}}\right)\right] -$$

$$\left. - \frac{R + x}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{t - T}{\pi}}\, e^{-(R+x)^2/4a(t-T)}\right\};$$

при $|x| > R$:

$$H(x, t) = H_2(x, t) - \frac{\varepsilon}{2m}\left\{\left(t - T + \frac{(R - x)^2}{2a}\right)\cdot\left[1 - \Phi\left(\frac{x - R}{2\sqrt{a(t - T)}}\right)\right] -\right.$$

$$- \frac{x - R}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{t - T}{\pi}}\, e^{-(R-x)^2/4a(t-T)} - \left(t - T + \frac{(R + x)^2}{2a}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{R + x}{2\sqrt{a(t - T)}}\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{R + x}{a}\sqrt{\frac{t - T}{\pi}}\, e^{-(R+x)^2/4a(t-T)}\right\}.$$

Поступило
2 X 1950

Институт механики
Академии наук СССР