Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

П. П. КУФАРЕВ

ЗАДАЧА О КОНТУРЕ НЕФТЕНОСНОСТИ ДЛЯ КРУГА ПРИ ЛЮБОМ ЧИСЛЕ СКВАЖИН

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 23 IX 1950)

В ([1]) было получено частное решение задачи о стягивании контура нефтеносности, которое дало возможность найти решение этой задачи для случая, когда в начальный момент область, занятая нефтью, есть круг и в ней находится лишь одна скважина.

В данной заметке указывается решение о стягивании контура нефтеносности для случая, когда область $G(0)$, занятая нефтью в начальный момент $t=0$, есть также круг, но число скважин и их расположение произвольно. Решение получается путем простого обобщения рассуждений статьи ([1]).

Впервые приближенное решение этой задачи для симметричного расположения скважин было получено П. Я. Полубариновой-Кочиной ([2]).

§ 1. Обозначим через $G(t)$ область, занятую нефтью в момент t; через $z=z(w,t)$, $z(0,t)=0$, $z'_w(0,t)>0$, — функцию, конформно отображающую круг $|w|<1$ на $G(t)$; через $\chi(z,t)$ — комплексный потенциал течения, и положим

$$\chi(z(w,t),t)=f(w,t).$$

Пусть скважины находятся в точках z_k, $k=0,1,2,\ldots,n$, $z_0=0$, мощность k-й скважины $2\pi q_k(t)$ и $w(z_k,t)=[a_k(t)]^{-1}$, $|a_k(t)|>1$ ($[a_0(t)]^{-1}=0$).

Граничное условие для $f(w,t)$ имеет вид

$$\operatorname{Re} f(\omega,t)=0,\quad \omega=e^{i\vartheta}, \tag{1}$$

откуда еще следует

$$\operatorname{Im}\omega f'_w(\omega,t)=0. \tag{2}$$

Удовлетворяя граничному условию (1) и рассматривая скважины как стоки, можно принять

$$f(w,t)=-q_0(t)\log w-\sum_{k=1}^{n}q_k(t)\log\frac{w-1/\overline{a}_k}{1-w/a_k}. \tag{3}$$

Далее, умножая скорость частицы жидкости

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}=\overline{\frac{\partial\chi}{\partial z}} \tag{4}$$

на $w^{-1}\overline{dz}\,/\,dw$, взяв вещественную часть, полагая $w=\bar\omega$ и учитывая (2), находим граничное условие для $z(w, t)$:

$$P(\omega, t) \equiv \frac{1}{\omega}\, z'_t(\omega, t)\, \bar z'_w\left(\frac{1}{\omega},\ t\right) + \omega \bar z'_t\left(\frac{1}{\omega},\ t\right) z'_w(\omega, t) = 2\omega f'_w(\omega, t). \quad (5)$$

Из (4) и (5) для скорости граничных частиц жидкости получается выражение

$$\frac{\overline{dz}}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{f'_w(w,t)}{z'_w(w,t)} = \frac{P(w,t)}{2wz'_w(w,t)}. \quad (6)$$

Так как $f'_w(w, t)$ рациональна по w, то в случае, если и $z(w, t)$ рациональна, так же выражается сопряженная скорость частиц жидкости и внутри жидкости при $|w|<1$.

Подсчитаем поток скорости через контур γ_z, окружающий точку z_k. Имеем

$$-2\pi q_k = \frac{1}{i}\int\limits_{\gamma_z} \frac{\partial \chi}{\partial z}\, dz = \frac{1}{i}\int\limits_{\gamma_w} \frac{\partial f}{\partial w}\, dw = 2\pi \operatorname*{Res}_{w=1/\bar a_k} \frac{\partial f}{\partial w}. \quad (7)$$

Отсюда и из (6) при рациональной $z(w, t)$ находим

$$R_k(t) = \operatorname*{Res}_{w=1/\bar a_k} \frac{P(w,t)}{w} = -2q_k(t). \quad (8)$$

Наконец, запишем еще условие неподвижности скважин

$$Z_k(t) = z\left(\frac{1}{\bar a_k(t)},\ t\right) = z_k = \text{const}. \quad (9)$$

§ 2. Будем искать частное решение задачи в виде

$$z(w, t) = \beta(t)\, w + \alpha(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(t)}{w - a_k(t)}. \quad (10)$$

В этом случае условия (8) и (9) запишутся следующим образом:

$$\int R_k(t)\, dt = -\frac{\bar A_k}{\bar a_k^2}\, z'_w\left(\frac{1}{\bar a_k}, t\right) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\bar A_k A_s}{(\bar a_k a_s - 1)^2} - \frac{\bar A_k \beta}{\bar a_k^2} = -2\int\limits_0^t q_k(t)\, dt + C_k$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\int R_0(t)\, dt = \bar\beta z'_w(0, t) = \beta\bar\beta - \bar\beta \sum_{s=1}^{n} \frac{A_s}{a_s^2} = -2\int\limits_0^t q_0(t)\, dt + C_0; \quad (11)$$

$$Z_k(t) = \alpha + \frac{\beta}{\bar a_k} - \sum_{s=1}^{n} \frac{A_s \bar a_k}{a_s \bar a_k - 1} = z_k;$$

$$Z_0(t) = \alpha - \sum_{s=1}^{n} \frac{A_s}{a_s} = z_0 = 0.$$

Левая часть $P(w, t)$ граничного условия (5) будет рациональной функцией от w с полюсами кратности 2 в точках a_k, $\bar a_k^{-1}$ и простыми полюсами в $z=0$, $z=\infty$. Поэтому, подсчитывая коэффициенты при w^{-1}, w^0, $\left(w-\frac{1}{\overline{a}_k}\right)^{-1}$, $\left(w-\frac{1}{\overline{a}_k}\right)^{-2}$ и учитывая, что

$$\overline{P}\left(\frac{1}{w}, t\right)=P(w,t), \quad wf_w'(w,t)=\frac{1}{w}\overline{f_w}\left(\frac{1}{w}, t\right), \tag{12}$$

можно представить граничное условие (5) в виде

$$P(\omega,t)-2\omega f_w(\omega,t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}R_k(t)+q_k(t)\right]\frac{\omega+1/\overline{a}_k}{\omega-1/\overline{a}_k}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}R_k(t)+q_k(t)\right]\frac{\omega+a_k}{\omega-a_k}-\sum_{n=1}^{n}\frac{\overline{A}_k}{\overline{a}_k^2}\frac{d\overline{Z}_k}{dt}\frac{\omega}{(\omega-1/\overline{a}_k)^2}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{a_k}\frac{dZ_k}{dt}\frac{\omega a_k}{(\omega-a_k)^2}+\overline{\beta}\frac{dZ_0}{dt}\frac{1}{\omega}+\beta\frac{d\overline{Z}_0}{dt}\omega+ \tag{13}$$
$$+2q_0(t)+R_0(t)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[R_k(t)-\overline{R_k(t)}\right]=0.$$

Отюда видно, что если α, β, A_k, a_k — решение системы уравнений (11), то функция (10) удовлетворяет граничному условию (5).

§ 3. Положим в формулах (10), (11) $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=1$, $A_k(0)=0$ и, следовательно, $C_k=0$, $C_0=1$. Тогда $z(w,0)=w$; следовательно, получается решение задачи для случая, когда в начальный момент нефть наполняет круг $|z|<1$.

§ 4. Рассмотрим, в частности, случай симметричного расположения скважин одинаковой мощности

$$q_0(t)=0, \quad q_k(t)=q(t), \quad z_k=z_0e^{2k\pi i/n}, \quad a_k(t)=a(t)\,e^{2k\pi i/n}. \tag{14}$$

При этом из соображений симметрии следует, что

$$A_k(t)=A(t)\,e^{4k\pi i/n}, \quad \alpha(t)=0. \tag{15}$$

Функция $z(w,t)$ имеет вид

$$z=\beta w+\frac{nAa^{n-2}w}{w^n-a^n}. \tag{16}$$

Для определения $\beta(t)$, $a(t)$, $A(t)$ (которые можно считать вещественными функциями) из (11) получаются уравнения

$$\beta^2-n\frac{A\beta}{a^2}=1,$$
$$\frac{nA^2a^{2n-4}(a^{2n}+n-1)}{(a^{2n}-1)^2}-\frac{A\beta}{a^2}=-\tau, \quad \tau=2\int_0^t q(t)\,dt, \tag{17}$$
$$\frac{\beta}{a}-\frac{nAa^{2n-2}}{a^{2n}-1}=z_0.$$

Из (17) находим

$$\beta=\frac{1+n\tau+a^2z_0^2}{2az_0},$$
$$A=\frac{1+n\tau-a^2z_0^2}{2nz_0}\left(a-a^{1-2n}\right), \tag{18}$$

где $a(t)$ — решение уравнения

$$(1+n\tau-a^2z_0^2)^2-2a^2z_0^2(a^{2n}-1)(1+n\tau-a^2z_0^2)+4a^{2n+2}z_0^2n\tau=0, \qquad (19)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$a(0)=\frac{1}{z_0}. \qquad (20)$$

Формулы (16), (18), (19), (20) дают решение задачи для некоторого интервала значений t, $|t|<t_0$, пока $z(w,t)$ однолистна.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
20 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Куфарев, ДАН, 60, № 8 (1948). [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Прикладн. матем. и мех., 9, в. 1, 79 (1945).