Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

В. В. РЫЖКОВ

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РИМАНОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 IX 1950)

Две n-мерные поверхности $\bar{x}=\bar{x}(u_i)$ и $\bar{y}=\bar{y}(u_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, в R_N допускают метрическое наложение первого порядка в точечном соответствии, установленном отнесением обеих поверхностей к одной и той же системе параметров u_i, в том и только том случае, если соответствие это изометрическое, т. е. в случае совпадения форм $\omega_1=d\bar{x}^2$ и $\omega_1'=d\bar{y}^2$.

Требование метрической наложимости порядка k равносильно требованию выполнения равенств

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\bar{x}}{\partial u_1^{\alpha_1}\ldots\partial u_n^{\alpha_n}}\,\frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n}\bar{x}}{\partial u_1^{\beta_1}\ldots\partial u_n^{\beta_n}}=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\bar{y}}{\partial u_1^{\alpha_1}\ldots\partial u_n^{\alpha_n}}\,\frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n}\bar{y}}{\partial u_1^{\beta_1}\ldots\partial u_n^{\beta_n}}, \tag{1}$$

$$1\leqslant\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant k, \qquad 1\leqslant\beta_1+\ldots+\beta_n\leqslant k,$$

которые, однако, не все независимы.

Для выполнения соотношений (1) достаточно, чтобы формы $\omega_s=(d^s\bar{x})^2$ и $\omega_s'=(d^s\bar{y})^2$ были попарно равны при $s=1, 2, \ldots, k$. Таким образом, заданием форм ω_s, $s=1, 2, \ldots, k$, определяется дифференциальная геометрия поверхности до порядка k. Все произведения в левых частях равенств (1) определяются заданием форм $\omega_s=(d^s\bar{x})^2$.

Можно рассматривать систему дифференциальных форм ω_s абстрактно, т. е. вне зависимости от порождающей их поверхности; можно говорить, что эти формы определяют риманову геометрию порядка k [1].

Как известно [2-4], при условии положительной определенности квадратичная форма ω_1 с аналитическими коэффициентами, определяющая риманову геометрию, может всегда быть получена как метрическая форма $d\bar{x}^2$ некоторой поверхности в евклидовом пространстве не более чем $\frac{n(n+1)}{2}$ измерений. Произвол, с которым осуществляется такое вложение, определяется в n функций $(n-1)$ аргументов.

В настоящей заметке мы рассматриваем аналогичную задачу вложения для римановой геометрии произвольного порядка k.

В § 1 приводятся основные уравнения задачи, в § 2 формулируется теорема вложения с указанием размерности пространства и степени произвола, а также указывается на возможность вложения в пространство постоянной положительной кривизны.

§ 1. Пусть $\omega_s(u_i, du_i)$ — дифференциальные формы степеней, равных $2s$, соответственно, с аналитическими коэффициентами. Основные уравнения задачи погружения имеют вид:

$$(d^s\overline{x})^2 - \omega_s = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

где размерность пространства, вмещающего $\overline{x}(u_i)$, нет необходимости заранее определять. Ограничения, налагаемые на формы ω_s в связи с требованием вещественности искомой поверхности (условия положительности), формулируются ниже.

Пусть $d_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} du_1$ и $\delta_1 = \frac{\partial}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_n} du_n$ — символы дифференцирования по u_1 и при u_1 постоянном, соответственно. Введем обозначения:

$$\Omega_s^{p_1, p_2} \equiv d_1^{s-p_1}\delta_1^{p_1}\overline{x}\, d_1^{s-p_2}\delta_1^{p_2}\overline{x}, \qquad 0 \leqslant p_1, \ p_2 \leqslant s; \tag{3^1}$$

$$\Omega_s^r \equiv \sum_{\alpha=\max(0,\, r-s)}^{\min(s,\, r)} C_s^\alpha C_s^{r-\alpha}\Omega_s^{\alpha,\, r-\alpha}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 2s; \tag{3^2}$$

$$\Omega_s \equiv \sum_{r=0}^{2s} \Omega_s^r \equiv (d^s\overline{x})^2, \qquad s = 1, 2, \ldots, k \tag{3^3}$$

Система (2) приводится теперь к виду

$$\Omega_s^r - \omega_s^r = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2s, \quad 1 \leqslant s \leqslant k, \tag{4}$$

где ω_s^r — формы однородные степени $2s - r$ относительно du_1 такие, что $\omega_s = \sum\limits_{r=0}^{2s} \omega_s^r$.

Образуем, далее, выражения

$$\overline{\Omega}_s^{p_1, p_2} \equiv \delta_1^2\Omega_s^{p_1, p_2} - d_1\delta_1\Omega_s^{p_1+1, p_2} - d_1\delta_1\Omega_s^{p_1, p_2+1} + d_1^2\Omega_s^{p_1+1, p_2+1} \equiv$$
$$\equiv 2\Omega_{s+1}^{p_1+1, p_2+1} - \Omega_{s+1}^{p_1+2, p_2} - \Omega_{s+1}^{p_1, p_2+2}. \tag{5}$$

Тогда

$$\Omega_{s+1}^{j+1, p-j} - \Omega_{s+1}^{j, p+1-j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=j}^{p-j-1} \overline{\Omega}_s^{\alpha, p-\alpha-1}, \quad 0 \leqslant j < \frac{p}{2}, \tag{6}$$

и (3^2) совместно с (6) определяет формы $\Omega_{s+1}^{p, q}$ единственным образом.

Система (4) теперь преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \Omega_s^{0, p} - \omega_s^{0, p} = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant k-1, \quad 0 \leqslant p \leqslant s; \\ \Omega_k^{q_1, q_2} - \omega_k^{q_1, q_2} = 0, \quad 0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant k, \end{gathered} \tag{7}$$

с присоединением следующих условий, относящихся к начальному значению $u_1 = \overset{0}{u_1}$:

$$\begin{gathered} \Omega_s^{p, q}\big|_0 - \omega_s^{p, q}\big|_0 = 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant s, \\ d_1\Omega_s^{p, q}\big|_0 - d_1\omega_s^{p, q}\big|_0 = 0, \ 1 \leqslant s \leqslant k-1. \end{gathered} \tag{8}$$

В уравнениях (7) и (8) через $\omega_s^{p, q}$ обозначены формы, получаемые из форм ω_s^r так же, как формы $\Omega_s^{p, q}$ получаются из форм Ω_s^r, т. е. из уравнений вида (6) и (3^2).

Посредством ряда дальнейших дифференцирований можно привести уравнения (7) к следующей форме:

$$d_1^{2k} \bar{x} d_1^p \delta_1^q \bar{x} + \ldots = 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant k - \frac{q}{2}, \quad 0 \leqslant q \leqslant 2k, \tag{9}$$

где члены, замененные многоточием, содержат производные не выше $2k$-го порядка, а производные по u_1 только до порядка $2k-1$.

Полагая $\bar{x}\big|_0 = \bar{\xi}_0$, $d_1^i \bar{x}\big|_0 = \bar{\xi}_i$, мы должны будем присоединять следующие дополнительные уравнения при $u_1 = \overset{0}{u}_1$:

$$\left(\delta_1^p \bar{\xi}_j\right)^2 + \ldots = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1, \quad 1 \leqslant p \leqslant k - j; \tag{10^1}$$

$$\bar{\xi}_i \delta_1^p \bar{\xi}_j + \ldots = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2k-1, \quad 0 \leqslant j \leqslant i-1, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2k-2j; \tag{10^2}$$

$$\bar{\xi}_i \bar{\xi}_j + \ldots = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2k-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant \max(i, k); \tag{10^3}$$

здесь, как и в (9), выписаны только главные члены уравнений.

§ 2. Дальнейшее преобразование уравнений (10^1, 10^2, 10^3) проводится посредством применения к уравнениям (10^1) преобразований предыдущего пункта, но с выделением символа дифференцирования $d_2 = \frac{\partial}{\partial u_2} du_2$ (при $u_1 = \overset{0}{u}_1$).

Повторение подобного процесса приводит в конце концов к системе, которая дает возможность установить существование и определить произвол решения, опираясь на теорему С. Ковалевской. В процессе такого преобразования наших уравнений определяются, в частности, все значения произведений (1) в начальной точке $u_1 = \overset{0}{u}_1, \ldots, u_n = \overset{0}{u}_n$. Будем называть систему форм ω_s положительно определенной, если матрица Грамма из определенных таким путем значений (1) будет положительно определенной.

Теперь может быть высказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть $\omega_s = \omega_s(u_i; du_i)$, $s = 1, 2, \ldots, k$, с аналитическими коэффициентами образуют положительно определенную в указанном смысле систему. Тогда в пространстве*

$$N = \sum_{s=1}^{k} \frac{n(n+1)\ldots(n+2s-1)}{(2s)!}$$

измерений найдется поверхность $\bar{x} = \bar{x}(u_i)$, для которой $(d^s\bar{x})^2 = \omega_s$.

Ограничиваясь такими $\bar{x}$, для которых все векторы

$$d\bar{x},\ d^2\bar{x}, \ldots, d^k\bar{x}; \quad \delta_1^2 d^{k-1}\bar{x}, \ \ldots, \ \delta_1^{2k}\bar{x}$$

(в числе N) линейно независимы, можно определить широту класса поверхностей $\bar{x}$ в

$$N_1 = \sum_{s=0}^{k-1} (k-s) \frac{n(n+1)\ldots(n+2s)}{(2s+1)!}$$

функций $n-1$ аргументов.

Не всякая система форм допускает вложение в пространство меньшей размерности.

Наше утверждение можно рассматривать как теорему, устанавливающую произвол метрического изгибания порядка k для n-мерных поверхностей в пространстве указанного выше числа измерений.

Присоединяя к системе уравнений (2) уравнение $\omega_0 = \overline{x}^2$, где $\omega_0 = \mathrm{const} > 0$, мы можем провести аналогичные рассуждения и тем самым установить возможность вложения нашей римановой геометрии порядка k в пространство постоянной положительной кривизны. При этом, однако, условия, обеспечивающие вещественность, должны быть несколько изменены.

Поступило
22 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Bompiani, Mém. Acc. di Roma, 6 (8) (1935). [2] L. Schläfli, Ann. di Mat., (2) 5 (1871—1873). [3] M. Janet, Ann. Soc. Pol. Math., 5 (1926). [4] E. Cartan, ibid., 6 (1927).