Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН и В. К. ДЗЯДЫК

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ КВАЗИ-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 X 1950)

Пусть $f(x)$ — непрерывная на данном сегменте $[a, b]$ функция и $E_n(f)$ — ее наилучшее равномерное приближение на $[a, b]$ посредством обыкновенных полиномов степени n.

Для некоторых классов функций поведение величины $E_n(f)$ хорошо известно. Наиболее хорошо изучены с этой точки зрения функции, имеющие производную некоторого порядка $r \geqslant 0$, удовлетворяющую условию Липшица α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Для них

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{1}$$

При $0 < \alpha < 1$, в силу классических результатов С. Н. Бернштейна, равенство (1) влечет существование r-й производной, удовлетворяющей условию $Lip\,\alpha$ на любом сегменте $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. В случае $\alpha = 1$ этого уже утверждать нельзя.

Аналогичные результаты имеют место для периодических функций и их наилучших приближений $E_n^*(f)$ посредством тригонометрических полиномов порядка n. Рассматривая периодический случай, Зигмунд показал [1], что условие

$$E_n^*(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$$

равносильно существованию у функции $f(x)$ производной r-го порядка, удовлетворяющей условию квази-гладкости

$$\left| f^{(r)}(x_1) - 2f^{(r)}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f^{(r)}(x_2) \right| \leqslant M \mid x_1 - x_2 \mid \tag{2}$$

равномерно на всей вещественной оси.

В связи с этим естественно возникает задача о поведении наилучшего приближения произвольной квази-гладкой функции посредством обыкновенных полиномов. Некоторые такого рода исследования принадлежат Монтелю [2], который, базируясь на ряде свойств функций Бесселя, установил следующую теорему.

Теорема (П. Монтель). *Если $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$\left| f(x_1) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_2) \right| \leqslant M \mid x_1 - x_2 \mid \tag{3}$$

для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, то ее наилучшее приближение $E_n(f)$ посредством обыкновенных полиномов на любом сегменте

$[a_1\, b_1]$, *целиком лежащем внутри интервала* (a, b), *удовлетворяет неравенству*

$$E_n(f) \leqslant K(a_1, b_1)\frac{1}{n}. \tag{4}$$

При этом важно заметить, что константа Монтеля $K(a_1, b_1)$, входящая в (4), неограниченно растет при $a_1 \to a$, $b_1 \to b$. Таким образом, неравенство (4) еще не дает возможности судить о поведении $E_n(f)$ на всем сегменте $[a, b]$.

В этой заметке мы ставим себе целью дать точный порядок убывания величины $E_n(f)$ на всем сегменте квази-гладкости функции $f(x)$.

Основным результатом является теорема 1.

Теорема 1. *Если непрерывная на* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *имеет* r*-ю* $(r \geqslant 0)$ *производную, удовлетворяющую условию* (2), *когда* $x_1, x_2 \in [a, b]$, *то для ее наилучшего приближения на сегменте* $[a, b]$ *посредством обыкновенных полиномов степени* n *справедливо соотношение:*

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \tag{5}$$

Применением известного метода С. Н. Бернштейна устанавливается следующее утверждение, которое можно рассматривать как обращение теоремы 1.

Теорема 2. *Если наилучшее приближение функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$ *посредством обыкновенных полиномов удовлетворяет условию* (5), *то* $f(x)$ *имеет* r*-ю производную, квази-гладкую на любом сегменте* $[a_1, b_1]$, *целиком лежащем внутри интервала* (a, b).

Примечание. Пример функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, рассматриваемой на $[-1, 1]$ и не квази-гладкой на этом сегменте, показывает, что теорема 2 в известном смысле дальше не может быть улучшена.

Для доказательства теоремы 1 мы устанавливаем следующую лемму о продолжении квази-гладких функций.

Лемма. *Если функция* $f(x)$, *заданная на* $[a, b]$, *принимает значение, равное нулю, в концах* a, b *и для любых двух точек* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *удовлетворяет условию* (3), *то существует периодическая функция* $F(x)$ *периода* $2(b-a)$, *для которой*

$$\left| F(x_1) - 2F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + F(x_2)\right| \leqslant 3M \mid x_1 - x_2 \mid \tag{6}$$

равномерно на всей вещественной оси, и такая, что для всех $x \in [a, b]$ $F(x) = f(x)$.

Без ограничения общности можно считать $a = 0$, $b = 1$, $M = 1$, $f(0) = f(1) = 0$. Пусть $F(x)$ периодическая, периода 2 функция, определенная на $[-1, 1]$ следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -f(-x), & -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что $F(x)$ удовлетворяет условию (6) равномерно на всей вещественной оси. Для этой цели рассмотрим три произвольные точки $x - h$, x, $x + h$. Можно считать $0 < x < 1$. Если ни одна из точек $x - h$ и $x + h$ не находится на $[0, 1]$, то неравенство (6) очевидно. В самом деле, в этом случае $2h > 1$ и, так как $|F(x)| \leqslant {}^2/_3$ ((3), лемма 1), то

$$|\Delta_h^2 F(x)| \leqslant {}^8/_3 < 6h.$$

Пусть теперь $-1 < x - h < 0 < x < x + h \leqslant 1$. Введем целое число $k \geqslant 1$ и число θ, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, так, чтобы $h = (2k - 1 + \theta) x$. В силу (7) получим

$$|\Delta_h^2 F(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{k-2} |f[2(k-i)x] - 2f[2(k-i-1)x] + f[2(k-i-2)x]| +$$
$$+ |f(2x) - 2f(x) + f(0)| + |f[(2k+\theta)x] - 2f[(2k - 1 + {}^1/_2\theta)x] +$$
$$+ f[(2k-2)x]| + |f[(2k - 2 + \theta)x] - 2f[(2k - 1 + {}^1/_2\theta)x] +$$
$$+ f(2kx)| \leqslant (4k+2)x.$$

Если $k = 1$, то (6) вытекает из неравенства $x < h$. Если же $k \geqslant 2$, то из $x = \frac{1}{2k - 1 + \theta} h \leqslant \frac{1}{2k-2} h$ следует $|\Delta_h^2 F(x)| \leqslant \frac{2k+1}{k-1} h \leqslant 5h$.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается еще воспользоваться приведенным результатом Монтеля и теоремой Джексона.

Следствие. *Если функция $f(x)$, заданная на $[0, \pi]$, удовлетворяет там условию* (3), *то ее наилучшее приближение на этом сегменте посредством тригонометрических полиномов порядка n убывает как $O\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Это следствие представляет собой усиление упомянутой теоремы Зигмунда.

Поступило
28 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Zygmund, Duke Math. Journ., 5, 12, 47 (1945). [2] P. Montel, Bull. Soc. Math. France, 46, 151 (1919). [3] А. Ф. Тиман, ДАН, 70, № 6 (1950).