Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

К. Р. КОВАЛЕНКО и М. Г. КРЕЙН

О НЕКОТОРЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ А. М. ЛЯПУНОВА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 IX 1950)

1. Рассматривая дифференциальное уравнение

$$y'' - q(x)y + \lambda p(x)y = 0 \tag{1}$$

с вещественными периодическими (периода ω) коэффициентами $q(x)$ и $p(x)$, интегрируемыми в интервале $(0, \omega)$, образуем два решения $\varphi(x; \lambda)$ и $\psi(x; \lambda)$ этого уравнения, определяемые начальными условиями

$$\varphi(0; \lambda) = 1, \quad \varphi'(0; \lambda) = 0; \qquad \psi(0; \lambda) = 0, \quad \psi'(0; \lambda) = 1,$$

и, следуя обозначениям А. М. Ляпунова, положим:

$$A(\lambda) = {}^1/_2\{\varphi(\omega; \lambda) + \psi'(\omega; \lambda)\}; \quad \rho_{1,2}(\lambda) = A(\lambda) \pm \sqrt{A^2(\lambda) - 1}.$$

Как известно еще из работ Флоке [1], если $A^2(\lambda) - 1 \neq 0$, то при данном значении параметра λ у уравнения (1) будут существовать два решения $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ такие, что:

$$Y_j(x + \omega) = \rho_j(\lambda)\, Y_j(x) \quad (j = 1, 2). \tag{2}$$

Вся вещественная λ-ось разбивается на открытые интервалы Z (зоны устойчивости), в которых $1 - A^2(\lambda) > 0$, и дополнительное множество U, состоящее, вообще говоря, из точек и замкнутых интервалов.

Если точка λ принадлежит некоторой зоне устойчивости или, наоборот, точка λ с некоторой ее окрестностью принадлежит множеству U, то все решения уравнения (1) для данного λ ограничены или, соответственно, неограничены на всей вещественной оси ($-\infty < x < \infty$).

Случай, когда точка λ принадлежит границе зоны устойчивости, требует особого рассмотрения.

Исследование расположения зон устойчивости и поведения решений при λ, лежащем на их границах, требует исследования взаимного расположения корней двух уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{I. } A(\lambda) - 1 = 0; \\ &\text{II. } A(\lambda) + 1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Это исследование, столь важное для теории параметрического резонанса и для некоторых вопросов волновой механики (теории кристаллических решеток), впервые было выполнено А. М. Ляпуновым для уравнения

$$y'' + \lambda p(x) y = 0. \tag{4}$$

Резюме своих исследований А. М. Ляпунов опубликовал в двух заметках в 1899 г. ([2,3]). В первой из них рассматривался тот случай, когда $p(x)$ — непрерывная периодическая функция, сохраняющая один и тот же знак, а во второй — тот случай, когда $p(x)$ меняет знак.

Через 20 лет появилась работа Гаупта ([4]), в которой исследовались корни уравнений (3) для того случая, когда в уравнении (1) $p(x) \equiv 1$, а $q(x)$ — некоторая непрерывная функция.

Путем определенной сдвижки параметра $\lambda \to \lambda - c$ и последующего преобразования (см. преобразование (5)) уравнение (1) с $p(x) \equiv 1$ можно привести к виду (4) с положительным (и, между прочим, дважды дифференцируемым) периодическим коэффициентом $p(x)$. В силу этого преобразования результаты Гаупта являются простыми следствиями того, что было опубликовано А. М. Ляпуновым еще в его первой заметке ([2]).

Вместе с тем, в иностранной литературе и в ряде статей советских авторов найденные А. М. Ляпуновым законы расположения корней уравнений (3) неправильно связываются с именем Гаупта. Эти законы расположения корней уравнений (3) А. М. Ляпунов получил как следствие общих глубоких фактов о спектрах различных краевых задач, порождаемых уравнением (4).

В другом месте будут приведены подробные доказательства результатов А. М. Ляпунова. Наш метод, повидимому, отличается от метода А. М. Ляпунова и позволил сделать некоторые дополнения к его результатам.

Здесь мы сформулируем основные результаты А. М. Ляпунова с нашими небольшими обобщениями и выводами из них. При этом выяснится роль еще одного исследования А. М. Ляпунова ([5]).

2. В дальнейшем на коэффициент $q(x)$ уравнения (1) будет накладываться требование:

А. Для любой вещественной непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ выполняется неравенство:

$$\int_0^{\omega} \{y'^2 + q(x) y^2\} \, dx \geqslant 0.$$

Заметим, что при сдвижке $\lambda \to \lambda - c$ функция $q(x)$ заменяется на функцию $q(x) + cp(x)$, и можно показать, что, если $p(x) \geqslant 0$ и не обращается в тождественный нуль ни на каком подинтервале, то при соответствующем выборе константы c можно всегда добиться выполнения условия А.

При выполнении условия А имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *При всяком невещественном λ один из мультипликаторов $\rho_{1,2}(\lambda)$ по модулю больше единицы, а другой меньше единицы.*

Из теоремы 1 легко получается следующее следствие (ср. с теоремой 2 в ([6])):

Теорема 2. *Если при возрастании параметра λ от вещественного α до некоторого β мультипликаторы движутся по единичной окружности, то мультипликатор $\rho_1(\lambda)$ движется монотонно против часовой стрелки, а $\rho_2(\lambda)$ — по часовой стрелке.*

Из других соображений для случая $p(x) \equiv 1$ эта теорема была недавно получена Путнемом ([7]).

3. Легко показывается, что всегда $A(0) \geqslant 1$.

Если, например, $q(x)$ неотрицательна и не равна почти всюду нулю, то $A(0) > 1$.

Если $A(0) = 1$, то $\lambda = 0$ будет всегда простым характеристическим числом краевой задачи:

$$y'' - q(x)y + \lambda p(x)y = 0; \quad y(0) = y(\omega), \quad y'(0) = y'(\omega), \tag{I}$$

т. е. ему будет соответствовать единственное, с точностью до мультипликативной константы, периодическое решение $\chi(x)$. В то же время $\lambda = 0$ будет простым или двойным нулем уравнения $A(\lambda) - 1 = 0$ в зависимости от того, будет ли интеграл

$$L = \int_0^\omega \chi^2(x)\, p(x)\, dx$$

отличным от нуля или равным нулю.

Функция $\chi(x)$ иногда не обращается в нуль. Если положить

$$y = \chi(x)\, u, \qquad t = \int_0^x \frac{dx}{\chi^2(x)}, \tag{5}$$

то уравнение (1) перейдет в уравнение $u_t'' + \lambda\chi^2(x)\, p(x)\, u = 0$ типа, изучавшегося А. М. Ляпуновым.

Отметим, что, за исключением указанного выше случая, корни уравнений (3), считая с их кратностями, совпадают с характеристическими числами, соответственно, краевой задачи (I) и задачи:

$$y'' - q(x)y + \lambda p(x)y = 0; \quad y(0) = -y(\omega), \quad y'(0) = -y'(\omega). \tag{II}$$

Теорема 3 (А. М. Ляпунова). *Пусть $A(0) = 1$. Тогда, если $L > 0$ ($L < 0$), то характеристические числа краевых задач* (I) *и* (II) *можно так перенумеровать, что имеет место следующий закон чередования:*

$$\lambda_{2i}^{\mathrm{I}} < \lambda_{2i}^{\mathrm{II}} \leqslant \lambda_{2i+1}^{\mathrm{I}} < \lambda_{2i+1}^{\mathrm{I}} \leqslant \lambda_{2i}^{\mathrm{I}} \ldots \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При этом $\lambda_0^{\mathrm{I}} = 0$, а $\lambda_{-1}^{\mathrm{I}} < 0$ ($\lambda_{-1}^{\mathrm{I}} = 0$, а $\lambda_0^{\mathrm{I}} = 0$).

Если $L = 0$, то закон чередования этих чисел будет тем же, если считать, что интервал $(\lambda_{-1}^{\mathrm{I}}, \lambda_0^{\mathrm{I}})$ стянулся в точку нуль, являющуюся вместе с тем простым характеристическим числом краевой задачи (I).

Зонами устойчивости будут все интервалы, имеющие концами смежные характеристические числа различных краевых задач (I) *и* (II).

В каждом из дополнительных «интервалов» $(\lambda_{2i-1}^{\mathrm{I}}, \lambda_{2i}^{\mathrm{I}})$, $(\lambda_{2i}^{\mathrm{II}}, \lambda_{2i+1}^{\mathrm{II}})$, за единственным исключением «интервала» $(\lambda_{-1}^{\mathrm{I}}, \lambda_0^{\mathrm{I}})$, лежит одно и только одно характеристическое число краевой задачи

$$y'' - q(x)y + \lambda p(x)y = 0; \quad y(a) = y(a + \omega) = 0. \tag{a}$$

Если положительные характеристические числа краевой задачи (a) обозначить, соответственно, через $\lambda_0^+(a)$, $\lambda_1^+(a)$, $\lambda_2^+(a), \ldots$, то, как обнаружил А. М. Ляпунов [2,3]:

$$\lambda_{2i}^{\mathrm{II}} = \min_{0 \leqslant a \leqslant \omega} \lambda_{2i}^+(a); \quad \lambda_{2i+1}^{\mathrm{II}} = \max_{0 \leqslant a \leqslant \omega} \lambda_{2i}^+(a);$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots,)$$

$$\lambda_{2i+1}^{\mathrm{I}} = \min_{0 \leqslant a \leqslant \omega} \lambda_{2i+1}^+(a); \quad \lambda_{2i+2}^{\mathrm{I}} = \max_{0 \leqslant a \leqslant \omega} \lambda_{2i+1}^+(a).$$

Аналогичное, разумеется, можно утверждать для отрицательных характеристических чисел.

После некоторых дополнений к результатам А. М. Ляпунова можно получить следующее предложение:

Теорема 4. *Пусть* $A(0) = 1$. *Тогда для любого* λ *из «интервала»* $(\lambda_{-1}^{\mathrm{I}}, \lambda_0^{\mathrm{I}})$ *все решения уравнения* (1) *имеют не более одного нуля в интервале* $(-\infty < x < \infty)$.

Для любого λ, *не принадлежащего „интервалу"* $(\lambda_{-1}^{\mathrm{I}}, \lambda_0^{\mathrm{I}})$, *любое решение уравнения* (1) *имеет бесконечное множество нулей в интервале* $(-\infty < x < \infty)$.

Случай $A(0) > 1$ не дает ничего существенно нового, как показывает следующая теорема.

Теорема 5. *Если* $A(0) > 1$, *то наименьшему положительному характеристическому числу* λ_0^{I} *и наибольшему отрицательному характеристическому числу* $\lambda_{-1}^{\mathrm{I}}$ *краевой задачи* (I), *и только этим числам, отвечают положительные фундаментальные функции.*

После сдвижки параметра $\lambda \to \lambda + \lambda_0^{\mathrm{I}}$ $(\lambda \to \lambda + \lambda_{-1}^{\mathrm{I}})$ *уравнение* (1) *обращается в уравнение, удовлетворяющее условиям теоремы Ляпунова с* $L > 0$ $(L < 0)$.

Пусть $q(x) \equiv 0$ $(\chi(x) \equiv 1)$. Если $L > 0$ $(\lambda_0^{\mathrm{I}} = 0)$, то можно поставить вопрос об определении по функции $p(x)$ нижней оценки для числа λ_0^{II} и верхней оценки для числа $\lambda_{-1}^{\mathrm{I}}$.

Если же $L = 0$ $(\lambda_0^{\mathrm{I}} = \lambda_{-1}^{\mathrm{I}} = 0)$, то можно поставить вопрос об определении нижней оценки для числа λ_0^{II} и верхней оценки для числа $\lambda_{-1}^{\mathrm{II}}$.

Первое решение всех этих вопросов было получено А. М. Ляпуновым (([5]), стр. 251—253) с помощью найденного им замечательного преобразования уравнения (4).

В литературе по случайным обстоятельствам приобрел широкую известность лишь критерий ограниченности всех решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ для случая $p(x) \geqslant 0$, полученный А. М. Ляпуновым в его знаменитой диссертации ([8]).

Недавно Борг ([9]), пользуясь рассуждениями, близкими к рассуждениям Н. Е. Жуковского ([10]), обобщил критерий А. М. Ляпунова на случай знакопеременного $p(x)$.

Если учесть теорему 3 А. М. Ляпунова, то результат Ляпунова — Борга будет означать не что иное, как то, что в случае $L \geqslant 0$

$$\lambda_0^{\mathrm{II}} \geqslant \frac{4}{\omega} \left(\int_0^{\omega} |p(x)|\, dx \right)^{-1}.$$

Это неравенство можно немедленно получить из определения числа λ_0^{II}, если воспользоваться рассуждением, указанным в ([6]).

Поступило
28 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Floquet, Ann. École normale, (2), 12 (1883). [2] А. М. Ляпунов, C. R., **128**, 910 (1899). [3] А. М. Ляпунов, C. R., **128**, 1085 (1899). [4] O. Haupt, Math. Ann., **79**, 278 (1919). [5] А. М. Ляпунов, Сообщ. Харьк. матем. сб-ва, 2 сер., **5**, №№ 3—4, 5—6 (1897). [6] М. Г. Крейн, ДАН, **73**, № 3 (1950). [7] C. R. Putnam, Am. Journ. Mathem., **71**, No. 1 (1949). [8] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Л.—М., 1935. [9] G. Borg, Am. Journ. Mathem., **71**, No. 1 (1949). [10] Н. Е. Жуковский, Полн. собр. соч., **1**, 1937, стр. 315—322.