Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

В.-К. И. КАРАБЕГОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u + \lambda u = 0$

(Представлено академиком М. В. Келдышем 29 IX 1950)

В предлагаемой работе строится пример области G_0, для которой задача Дирихле уравнения $\Delta u + \lambda_0 u = 0$ всегда имеет единственное (классическое) решение, но при апроксимации области G_0 извне произвольной последовательностью нормальных областей $\{G_n\}$ получаем для одной и той же граничной функции f, по крайней мере, две, существенно различные, последовательности $\{U_{n,f}^{(1)}\}$ и $\{U_{n,f}^{(2)}\}$, в зависимости от способа продолжения функции f.

Пусть S_0 — сфера единичного радиуса с центром в точке (0, 0, 0). K_0 — квадрат с вершинами $(^1/_2, {}^1/_2, 0)$, $(-^1/_2, {}^1/_2, 0)$, $(-^1/_2, -^1/_2, 0)$, $(^1/_2, -^1/_2, 0)$. Разбивая K_0 на четыре равных квадрата, получаем квадраты K_{k_1} ($k_1 = 1, 2, 3, 4$). Разбивая крадрат $K_{k_1 \ldots k_{n-1}}$ на четыре равных квадрата, получаем квадраты $K_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n}$ ($k_n = 1, 2, 3, 4$). π_n — плоскость $z = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \ldots$). $M_{k_1 \ldots k_n}$ — центр квадрата $K_{k_1 \ldots k_n}$. $P_{k_1 \ldots k_n}$ — проекция точки $M_{k_1 \ldots k_n}$ на плоскость π_n. $l_{k_1 \ldots k_n}$ — отрезок, соединяющий точку $P_{k_1 \ldots k_{n-1}}$ с точкой $P_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n}$. $t_{k_1 \ldots k_n}$ — отрезок, лежащий внутри отрезка $l_{k_1 \ldots k_n}$.

Пусть Δ_n такая область, что:

а) Δ_n состоит из 4^n цилиндров $c_{k_1 \ldots k_n}$, $c_{k_1 \ldots k_n}$ содержит $t_{k_1 \ldots k_n}$ внутри, лежит между π_{n-1} и π_n, над квадратом $K_{k_1 \ldots k_n}$. Цилиндры $c_{k_1 \ldots k_n}$ строим так, чтобы они попарно не пересекались.

б) Цилиндры $c_{k_1 \ldots k_n}$ выбираем столь малыми, чтобы емкость замкнутого множества $\overline{\Delta}_n$ оказалась меньше, чем $1/4^{n+3}$.

Область G_0 получается исключением из внутренней части сферы S_0 замкнутого множества $\overline{K}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta}_n$.

Покажем, что если $Q_0(x_0, y_0, 0) \in K_0$, то $\liminf_{P \to Q_0} U_{\psi_\rho}(P) \leqslant {}^1/_4$, где $\psi_\rho(P)$ — ступенька относительно точки Q_0, $\rho \leqslant {}^1/_4$ (1). Рассмотрим точку $\widetilde{Q}_0(x_0, y_0, z)$, $-\rho < z < 0$. $\{G_n\}$ — нормальные области, апроксимирующие G_0 извне. λ_n — емкость множества E_n точек P дополнения к $\overline{G}_0$, удовлетворяющих условию $\frac{1}{2^n} \leqslant PQ_0 \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_n < \frac{1}{4}$ в силу свойства б) области Δ_n.

Граница Σ_n области G_n лежит вне некоторой сферы $\overline{PQ_0} \leqslant 2^{-q_n}$. Пусть $E_j^{(n)}$ — множество точек дополнения к G_n, принадлежащих E_j. В области G_n имеем $U_{n,\psi_\rho}(P) \leqslant \sum_{j=1}^{q_n} W_j^{(n)}(P) \leqslant \sum_{j=1}^{q_n} W_j(P)$; $W_j^{(n)}$, W_j — потенциалы соответствующих замкнутых множеств ([1]).

В частности, $U_{n,\psi_\rho}(\widetilde{Q}_0) \leqslant \sum_{j=1}^{q_n} 2^j \lambda_j < \frac{1}{4}$, следовательно, $U_{\psi_\rho}(\widetilde{Q}_0) \leqslant \frac{1}{4}$, а потому и $\liminf_{P \to Q_0} U_{\psi_\rho}(P) \leqslant \frac{1}{4}$.

Пусть $G_0^* \subset G_0$ — множество тех точек $P(x, y, z)$, для которых $(x, y) \in \overline{K}_0$, $-{}^1/_8 \geqslant z \geqslant -{}^1/_4$; $\Gamma_i(P, Q)$ — функция Грина области G_i $(i = 0, 1, \ldots)$, $\Gamma^*(P, Q) = \lim_{n \to \infty} \Gamma_n(P, Q)$; $V^*(P, Q) = \Gamma^*(P, Q) - \Gamma_0(P, Q)$ $V^*(P, Q)$ — гармоническая, регулярная при $P \in G_0$ функция, непрерывная в 6-мерной области $G_0^* \times G_0^*$.

В силу известных свойств функции Грина имеем $V^*(P, Q) \geqslant 0$. Покажем, что $\limsup_{P \to Q_0} V^*(P, \widetilde{Q}_0) > 0$, где $\widetilde{Q}_0(x_0, y_0, z_0) \in G_0^*$, $Q_0(x_0, y_0, 0)$ — проекция $\widetilde{Q}_0$ на K_0. Действительно, зададим вне G_0 непрерывную функцию $f(P) \equiv 1 / P\widetilde{Q}_0$. $f(P)$ достигает наибольшего значения при $P = Q_0$; $f(Q_0) = 1 / |z_0|$.

Если $\mu_0 = \sup_{\overline{PQ_0} \geqslant \rho_0} \frac{1}{P\widetilde{Q}_0}$, то имеем: $f(P) \leqslant \mu_0 + \left[\frac{1}{|z_0|} - \mu_0\right] \psi_{\rho_0}(P)$, где $\psi_{\rho_0}(P)$ — ступенька относительно точки Q_0. Если $U_{n,f}$ — гармоническая внутри G_n функция, принимающая значение f на Σ_n, то $U_{n,f}(P) \leqslant \mu_0 + \left[\frac{1}{|z_0|} - \mu_0\right] U_{n,\psi_{\rho_0}}(P)$ и, переходя к пределу по n, имеем:

$$U_f(P) \leqslant \mu_0 + \left[\frac{1}{|z_0|} - \mu_0\right] U_{\psi_{\rho_0}}(P), \quad P \in G_0.$$

В частности, если P лежит на отрезке, соединяющем $\widetilde{Q}_0$ и Q_0, то $U_f(P) \leqslant \mu_0 + \left[\frac{1}{|z_0|} - \mu_0\right] \frac{1}{4}$, и потому

$$\liminf_{P \to Q_0} U_f(P) < f(Q_0) - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Итак, $\limsup_{P \to Q_0} V^*(P, Q) > 0$, откуда следует, что $V^*(P, Q) > 0$ при всех $P \in \overline{G_0^*}$, $Q \subset \overline{G_0^*}$, в силу непрерывности $V^*(P, Q)$ в $\overline{G_0^* \times G_0^*}$ имеем $\Gamma^*(P, Q) - \Gamma_0(P, Q) > \beta > 0$ при всех $P \in G_0^*$, $Q \in G_0^*$.

Рассмотрим два интегральных уравнения

$$u(P) - \lambda \int_{G_0} \Gamma(P, Q)\, u(Q)\, dQ = 0, \tag{1}$$

$$u(P) - \lambda \int_{G_0} \Gamma^*(P, Q)\, u(Q)\, dQ = 0. \tag{2}$$

Пусть λ_0 и λ_0^* — соответственно первые собственные значения этих уравнений. Покажем, что им соответствуют положительные собственные функции $v_0(P) > 0$ и $v_0^*(P) > 0$. Действительно, пусть $\{G_n\}$ — последовательность областей, апроксимирующих G_0 изнутри. Пусть каждая область G_n имеет столь гладкую границу, что для нее собственные функции вариационной задачи будут собственными функциями уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в классическом смысле, а не в смысле сходимости в среднем ([3]). Следовательно, если $\lambda_0^{(n)}$ есть первое собственное значение для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ и области G_n, то соответствующая собственная функция $v_0^{(n)}(P)$ будет положительной внутри G_n. Далее можно показать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_0^{(n)} = \lambda_0$. Из последовательности нормированных собственных функций $\left\{ v_0^{(n)}(P) \left(\int\limits_{G_n} [v_0^{(n)}]^2 \, dP \right)^{-1/2} \right\}$ можно выделить равномерно сходящуюся внутри области G_0 подпоследовательность, предельная функция которой будет искомой положительной собственной функцией $v_0(P)$.

Так как граница области G_0 не имеет объема, то аналогичными рассуждениями, примененными к последовательности областей $\{G_n\}$, апроксимирующих G_0 извне, можно доказать существование положительной функции $v_0^*(P)$. Далее,

$$\lambda_0 = \frac{1}{(\widetilde{v}_0, A\widetilde{v}_0)} > \frac{1}{(\widetilde{v}_0, A^*\widetilde{v}_0)} \geqslant \frac{1}{\sup(\psi, A^*\psi)} = \lambda_0^*,$$

где $\widetilde{v}_0 = v_0(P) \left(\int\limits_{G_0} v_0^2 \, dP \right)^{-1/2}$, $A^*\psi \equiv \int\limits_{G_0} \Gamma^*(P, Q)\, \psi(Q)\, dQ$ и т. д. ([2]).

Для уравнения

$$\Delta u + \lambda_0^* = 0 \tag{3}$$

и области G_0 задача Дирихле будет разрешимой при любой непрерывной граничной функции f.

Пусть $\{G_n\}$ — произвольная последовательность нормальных (гладких) областей, апроксимирующих G_0 извне. Пусть $\{U_{n,1}(P)\}$ есть последовательность решений задачи Дирихле для областей $\{G_n\}$, уравнения (3) и граничной функции $f(P) \equiv 1$.

Покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{G_n} U_{n,1}^2(P)\, dP = +\infty.$$

Действительно, в противном случае последовательность $\{U_{n,1}(P)\}$ сходилась бы равномерно внутри G_0 к функции $U_1(P)$, удовлетворяющей интегральному уравнению

$$U_1(P) - \lambda_0^* \int\limits_{G_0} \Gamma^*(P, Q)\, U_1(Q)\, dQ = 1,$$

которое неразрешимо, так как $\int\limits_{G_0} 1 \cdot v_0^*(P)\, dP \neq 0$.

Положив $v_n(P) = U_{n,1}(P) \left(\int\limits_{G_n} U_{n,1}^2 \, dP \right)^{-1/2}$, мы можем считать последовательность $\{v_n(P)\}$ равномерно сходящейся внутри G_0 к функции $v(P) \neq 0$ и удовлетворяющей уравнению (3).

Пусть $f(P)$ такова, что при некотором способе ее продолжения на границе Σ_n области G_n получаем функцию f_n, а последовательность соответствующих решений $\{U_{n,f}^{(1)}\}$ равномерно сходится внутри области G_0 к функции $U_f^{(1)}$.

Но другим способом продолжения функции f можно считать задание на Σ_n функции $f_n + \left(\int\limits_{G_n} U_{n,1}^2 \, dP \right)^{-1/2}$. Соответствующими решениями задачи Дирихле для (3) и областей $\{G_n\}$ будут $U^{(2)}_{n,f} \equiv U^{(1)}_{n,f} + v_n$, а последовательность $\{U^{(2)}_{n,f}\}$ будет равномерно сходиться внутри G_0 к функции $U^{(2)}_f$, отличной от $U^{(1)}_f$.

Настоящая работа является ответом на вопрос, поставленный акад. М. В. Келдышем.

Математический сектор
Академии наук Арм.ССР

Поступило
23 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Усп. матем. наук, 8 (1941). [2] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М.— Л., 1947. [3] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, М.— Л., 1945.