Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

О НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ ГРУНТОВЫХ ВОД

При расчете неустановившихся движений грунтовых вод, возникающих, когда изменяется уровень воды в реке или канале, пользуются методами, основанными на осреднении скоростей по вертикали. Иначе говоря, пользуются допущением, что скорости течения почти горизонтальны и мало изменяются по высоте вертикального сечения.

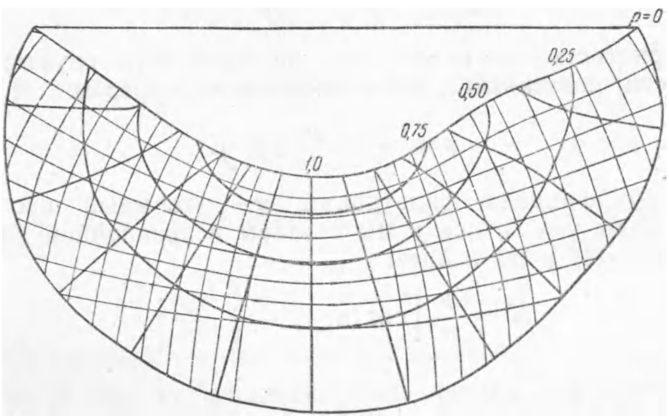

Рис. 1

Это допущение близко к действительности, когда мы рассматриваем течение вдали от канала. В начальной же стадии движения, которое возникает при наполнении канала, и в ряде других задач это допущение неприемлемо. В настоящей статье даютс формулы, по которым можно развить графический метод расчета неустановившихся движений, пригодный для начальной стадии движения.

На свободной поверхности грунтовых вод давление принимается постоянным, равным атмосферному давлению. Если мы хотим учесть капиллярность грунта, то значение атмосферного давления должно быть уменьшено на величину p_k, соответствующую капиллярным свойствам данного грунта [1], и мы будем иметь $p = p_0 = p_a - p_k$ на поверхности.

Можно принять постоянное значение давления на свободной поверхности равным нулю.

Давление в каждой точке области движения меняется со временем. На свободной поверхности можем записать условие:

$$p(x, y, t) = 0, \tag{1}$$

причем можно рассматривать уравнение (1) как уравнение свободной поверхности.

Дифференцируя (1) по t, получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{2}$$

Поступая аналогично тому, как это делают в газовой динамике (см., например, [2]) при выводе скорости перемещения поверхности разрыва), будем иметь:

$$N = -\frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}}\frac{dx}{dt} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}}\frac{dy}{dt}; \tag{3}$$

N — скорость перемещения свободной поверхности.

Согласно основным положениям теории фильтрации,

$$m\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad m\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{4}$$

где m — пористость или недостаток насыщенности грунта; φ — потенциал скорости, связанный с давлением таким образом:

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\gamma} + y\right). \tag{5}$$

Здесь k — коэффициент фильтрации; γ — объемный вес жидкости (у нас для воды $\gamma = 1$), ось y мы считаем направленной вниз.

С помощью (4) и (5) найдем

$$N = \frac{k}{m}\left[\cos(n, y) - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial n}\right]. \tag{6}$$

Заметим, что для случая, изображенного на рис. 1, $\partial p / \partial n$ получается отрицательным, и мы можем написать

$$\frac{\partial p}{\partial n} \approx -\frac{\Delta' p}{\Delta n},$$

где

$$\Delta' p = p_1 - p_0,$$

причем p_1 — значение давления на соседней изобаре.

$$N = \frac{k}{m}\left[\cos(n, y) + \frac{\Delta' p}{\Delta n}\right]. \tag{7}$$

Для $\cos(n, y)$ получаем положительные значения, если течение происходит вниз, и отрицательные значения, если поверхность движется вверх.

Формула (7) является основной, по ней производятся практические расчеты.

Допустим, что мы знаем форму свободной поверхности в некоторый момент времени t. Нам нужно найти форму этой поверхности к моменту времени $t + \Delta t$, где Δt достаточно малая величина для того, чтобы можно было считать скорость перемещения N свободной поверхности постоянной в течение промежутка времени Δt. По формуле (7) для этого нам достаточно вычислить косинус угла между нормалью к поверхности и осью y и найти $\Delta' p / \Delta n$ в момент времени t.

Если бы мы знали поле изобар в момент времени t, то вычислили бы $\Delta' p$ по двум изобарам: $p = p_0$ и $p = p_1$, ближайшей к p_0.

Таким образом мы сводим нашу задачу к построению системы изобар в данный момент времени.

Так как давление удовлетворяет уравнению Лапласа, то $p(x, y)$ есть гармоническая функция. Обозначим сопряженную с ней функцию через p'. Тогда величина ([3])

$$P = p + ip'$$

будет лишь множителем отличаться от функции Жуковского θ.

Имеем такие соотношения между функцией тока и потенциалом скорости, с одной стороны, и величинами p и p' с другой:

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\gamma} - y\right),$$

$$\psi = -k\left(\frac{p'}{\gamma} + x\right).$$

Удобнее ввести две другие функции вместо φ и ψ, а именно, напор h:

$$h = \frac{p}{\gamma} - y = -\frac{\varphi}{k}$$

и функцию q, которую можно назвать «приведенным расходом»:

$$q = \frac{\psi}{k} = \frac{p'}{\gamma} + x.$$

Приняв для случая фильтрации воды $\gamma = 1$, перепишем последние равенства в виде ([3]):

$$h = p - y, \quad q = p' + x.$$

Имеем три семейства ортогональных линий:

$$p \text{ и } p'; \quad h \text{ и } q; \quad x \text{ и } y.$$

Нам нужны линии $p = \text{const}$, но для контроля мы можем использовать свойства остальных линий.

Для того чтобы найти «первое» положение свободной поверхности, воспользуемся формулами, имеющими место в простейшем случае — фильтрации по вертикали, определяемой уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{m}\,\frac{H + y}{y}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$\frac{kT}{Hm} = \frac{y}{H} - \ln\left(1 + \frac{y}{H}\right),$$

или, для малых значений t,

$$\frac{y}{H} = \mu + \frac{1}{3}\mu^2 + \frac{1}{36}\mu^3 + \ldots,$$

где $\mu = \sqrt{2kt / mH}$.

Будем считать H равным глубине канала в различных его сечениях и будем откладывать y по нормали к этому сечению.

В случае осевой симметрии имеем функции φ и ψ, связанные соотношениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Условие для скорости перемещения свободной поверхности имеет вид

$$N=\frac{k}{m}\left[\cos(n,z)-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial n}\right].$$

Функцией, «сопряженной» с p, является функция p', связанная с функцией ψ так:

$$\psi=-\frac{k}{\gamma}p'-\frac{k}{2}r^2,$$

при этом

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial z},\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial r}.$$

Способ построения взаимно ортогональных линий

$$p=\text{const},\qquad p'=\text{const};$$
$$\varphi=\text{const},\qquad \psi=\text{const}$$

здесь иной, чем в случае плоской задачи, так как эти линии не образуют изотермических систем ([4],[6]).

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
21 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Ф. Аверьянов, Инж. сборн. АН СССР, 7 (1950). [2] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, 2, 1948. [3] Б. В. Ризенкампф, Зап. Саратовск. гос. ун-та, 1 (1938); 14 (1940). [4] Г. Ф. Проскура, Гидродинамика турбомашин, 1934. [5] Н. К. Гиринский, Научн. зап. МГМИ, 4 (1937). [6] П. В. Мелентьев, Методика расчета лопастей гидротурбомашин, Изд. АН СССР, 1939.