Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

П. П. КУФАРЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНТУРЕ НЕФТЕНОСНОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ЦЕПОЧКОЙ СКВАЖИН

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 23 IX 1950)

§ 1. В заметке предлагается решение задачи о перемещении контура нефтеносности в случае, когда в начальный момент нефть заполняет бесконечную полосу $|\mathrm{Re}\, z| < \omega_1^0/2$, в которой находится бесконечная цепочка симметрично расположенных скважин одинаковой мощности $2\pi q(t)$.

Введем следующие обозначения: $2n\omega_2^0 = 2nih$ $(h > 0,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — аффикс n-й скважины; $\chi(z, t)$ — комплексный потенциал течения; $z = z(u, t)$, $z(0, t) = 0$, $z'_u(0, t) > 0$, — функция, конформно отображающая на область $G(t)$, занятую нефтью в момент t, полосу $|\mathrm{Re}\, u| < {}^1/_2\, \omega_1 \equiv {}^1/_2\, \omega_1^0$; $2n\omega_2(t)$ — образ точки $z = 2n\omega_2^0$ в плоскости u; $f(u, t) = \chi(z(u, t), t)$.

§ 2. При решении задачи используются эллиптическая функция $pu = p(u;\ 2\omega_1, 2\omega_2)$ и соответствующие функции ζu, σu. Для дальнейшего необходимы следующие формулы:

$$\frac{\partial \zeta u}{\partial \omega_2} = \varphi(u) = \sum_{m,n}{}' \left[\frac{2n}{(u - w_{mn})^2} - \frac{2n}{w_{mn}^2} - \frac{4nu}{w_{mn}^3} \right] =$$

$$= \frac{2\omega_1}{\pi i} \left[\zeta(u - \omega_1) + \eta_1 - u \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] pu - \frac{2\omega_1 e_1}{\pi i} \zeta(u - \omega_1) +$$

$$+ \left(\frac{2\omega_1 e_1}{\pi i} + \frac{2\eta_1}{\pi i} \right) \zeta u - \frac{\omega_1 g_2}{6\pi i} - \frac{2\omega_1 e_1}{\pi i}; \qquad (1)$$

$$\varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u) + 2\frac{d\eta_1}{d\omega_2}; \qquad (2)$$

$$\varphi(u + 2\omega_2) = \varphi(u) + 2pu + 2\frac{d\eta_2}{d\omega_2}; \qquad (3)$$

$$\frac{d\eta_1}{d\omega_2} = \frac{2\eta_1^2}{\pi i} - \frac{\omega_1^2 g_2}{6\pi i}; \qquad (4)$$

$$\frac{d\eta_2}{d\omega_2} = \frac{2\eta_1\eta_2}{\pi i} - \frac{\omega_1\omega_2 g_2}{6\pi i}; \qquad (5)$$

$$\frac{de_1}{d\omega_2} = \frac{2\omega_1 g_2}{3\pi i} + \frac{4\eta_1 e_1}{\pi i} - \frac{4\omega_1 e_1^2}{\pi i} \qquad (6)$$

(в общепринятых обозначениях теории эллиптических функций).

§ 3. Рассматривая скважины как стоки и удовлетворяя граничному условию

$$\operatorname{Re} f(u, t) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} u = \pm \frac{\omega_1}{2} \tag{7}$$

или

$$\operatorname{Im} f'_u(u, t) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} u = \pm \frac{\omega_1}{2}, \tag{8}$$

принимаем

$$f(u, t) = -q \log e^{-\eta_1 u} \frac{\sigma u}{\sigma(u-\omega_1)}. \tag{9}$$

Умножая скорость жидкости

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} = \overline{\frac{\partial \chi}{\partial z}} \tag{10}$$

на $\overline{\partial z/\partial u}$, учитывая, что на границе du/dt чисто мнимое и имея в виду (8), находим для $z(u, t)$ граничное условие

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial u}}\right) = \frac{\partial f}{\partial u} = -q\left[\zeta u - \zeta(u-\omega_1) - \eta_1\right], \tag{11}$$

или, так как $\overline{u} = \omega_1 - u$ при $\operatorname{Re} u = \omega_1/2$; $\overline{u} = -\omega_1 - u$ при $\operatorname{Re} u = -\omega_1/2$,

$$P(u, t) = z'_t(u, t)\,\overline{z}'_u(\omega_1 - u, t) + \overline{z}'_t(\omega_1 - u, t)\,z'_u(u, t) + \\ + 2q\left[\zeta u - \zeta(u-\omega_1) - \eta_1\right] \tag{12}$$

на прямой $\operatorname{Re} u = \omega_1/2$;

$$Q(u, t) = z'_t(u, t)\,\overline{z}'_u(-\omega_1 - u, t) + \overline{z}'_t(-\omega_1 - u, t)\,z'_u(u, t) + \\ + 2q\left[\zeta u - \zeta(u-\omega_1) - \eta_1\right] \tag{13}$$

на прямой $\operatorname{Re} u = -\omega_1/2$.

§ 4. Будем искать решение задачи в виде

$$z = \beta(t)\,u + A(t)\,\zeta(u-\omega_1) + A(t)\,\eta_1, \tag{14}$$

где β, A (и $\eta_1 = \zeta\omega_1$) — вещественные функции t и $\beta(0) = 1$, $A(0) = 0$.

Из условия $z(2n\omega_2, t) = 2n\omega_2^0$ получаем

$$\beta\omega_2 + A\eta_2 = \omega_2^0. \tag{15}$$

Потребуем еще, чтобы выполнялось соотношение

$$\beta\omega_1 + A\eta_1 = \omega_1 \equiv \omega_1^0. \tag{16}$$

При этом условии, как следует из (14), (1), (2), функция $z'_t(u, t)$ будет иметь период $2\omega_1$; для эллиптических функций $z'_u(u, t)$ и $\zeta u - \zeta(u-\omega_1)$ $2\omega_1$ также является периодом. Поэтому левые части $P(u, t)$, $Q(u, t)$ граничных условий (12), (13) будут тождественны. При мероморфности функций, входящих в (12), это соотношение (или (13)) должно выполняться всюду в плоскости u.

Очевидно, $P(u, t)$ имеет период $2\omega_1$ (при условии (16)). Пользуясь фомулами (14), (1), (3), (15), можно показать, что $2\omega_2$ также является периодом для $P(u, t)$. Следовательно, $P(u, t)$ — эллиптическая функция. Особыми точками $P(u, t)$ в параллелограмме периодов являются $u = 0$

и $u=\omega_1$. Определяя первые члены разложений $P(u, t)$ в ряд Лорана в окрестности этих точек, находим

$$P(u, t)=\left\{2q+\frac{d\,[A\,(Ae_1-\beta)]}{dt}\right\}\frac{1}{u}+c_1 u+\ldots,$$

$$P(u, t)=\overline{P}(\omega_1-u, t)=-\left\{2q+\frac{d\,[A\,(Ae_1-\beta)]}{dt}\right\}\frac{1}{u-\omega_1}-\overline{c}_1(u-\omega_1)+\ldots \tag{17}$$

Положим теперь

$$\frac{d\,[A\,(Ae_1-\beta)]}{d\omega_2}\,\frac{d\omega_2}{dt}=-2q(t). \tag{18}$$

Тогда $P(u, t)$, как эллиптическая функция, голоморфная в параллелограмме периодов и равная нулю при $u=0$, будет тождественно равна нулю и, в частности, граничные условия (12), (13) удовлетворяются.

Итак, функция (14) действительно является решением задачи, если система функций $A(t)$, $\beta(t)$, $\omega_2(t)$ является решением системы уравнений (15), (16), (18) и $A(0)=0$, $\beta(0)=1$, $\omega_2(0)=\omega_2^0$.

Для вычисления производной, входящей в (18), устанавливаем при помощи формул (15) и (16), что

$$\frac{d\,[A\,(Ae_1-\beta)]}{d\omega_2}+\frac{2\omega_1}{\pi i}(Ae_1-\beta)^2=\frac{A^2}{\omega_1}\left[\frac{2}{\pi i}(\omega_1 e_1+\eta_1)^2+\frac{d\,(\omega_1 e_1+\eta_1)}{dt}\right].$$

Отсюда по формулам (4), (6) находим

$$\frac{d\,[A\,(Ae_1-\beta)]}{d\omega_2}=-\frac{\omega_1 A^2}{\pi i}\left(6e_1^2-\frac{g_2}{2}\right)-\frac{2\omega_1}{\pi i}(Ae_1-\beta)^2.$$

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
28 III 1950