Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 3

МЕХАНИКА

М. Ф. ШУЛЬГИН

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 20 IX 1950)

1. Вспомогательные переменные. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\ddot{q}_k = f_k(t;\ q_1,\ q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1;\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Введем вспомогательные (избыточные) переменные $q_{n+1},\ q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ и положим

$$L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \dot{q}_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} f_i q_{n+i}, \tag{2}$$

где $\dot{q}_{n+i} = dq_{n+i}/dt$. Тогда мы можем переписать систему (1) так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n+i}} - \frac{\partial L}{\partial q_{n+i}} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

вместе с уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

служащими для определения вспомогательных переменных q_{n+1}, $q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$.

Совокупность уравнений (3) и (4) образует лагранжеву систему $2n$ уравнений с кинетическим потенциалом

$$L\,(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_{2n};\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{2n}).$$

2. Циклические координаты. Предположим теперь, что некоторые координаты, например, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $(k \leqslant n)$ являются циклическими, т. е. не входят явно в функцию L, но эта функция содержит явно соответствующие производные $\dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$. Тогда уравнения (4), соответствующие k циклическим координатам, примут вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{5}$$

где c_i — произвольные постоянные; эти уравнения дают k интегралов нашей системы.

Используя эти k интегралов, можно понизить порядок системы (3) и (4).

Для этой цели введем функцию Рауса

$$R = L - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \tag{6}$$

При помощи k уравнений (5) можно выразить соответствующие циклическим координатам производные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ и, следовательно, R как функцию переменных:

$$q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_{2n}, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \ldots, \dot{q}_{2n}, c_1, c_2, \ldots, c_{2k}.$$

Варьируя равенство (6) получим такие соотношения:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\rho} = \frac{\partial R}{\partial q_\rho}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} \quad (\rho = k+1, \ldots, 2n), \tag{7}$$

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial R}{\partial c_i} \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{8}$$

Оставшиеся уравнения системы (3) и (4) перепишутся после этого следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial R}{\partial q_\rho} = 0 \quad (\rho = k+1, \ldots, 2n), \tag{9}$$

т. е. мы получили новую систему $2n-k$ уравнений Лагранжа, в которой теперь роль кинетического потенциала L играет функция R; эти уравнения содержат только нециклические координаты и их производные.

Если после решения системы (9) переменные $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_{2n}$ будут определены как функции t, то остальные переменные $q_1, q_2, \ldots, q_k$ можно будет найти из уравнений:

$$q_i = -\int \frac{\partial R}{\partial c_i} dt + b_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{10}$$

где b_i — произвольные постоянные.

Заметим еще, что если R явно от t не зависит, то система уравнений (9) имеет первый интеграл вида

$$\sum_{\rho=k+1}^{2n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} \dot{q}_\rho - R = \text{const},$$

и тогда по методу Уиттекера ([1]) можно уменьшить число этих уравнений еще на единицу, сведя задачу в конечном счете к решению системы уравнений, аналогичной лагранжевой, но с числом уравнений $2n-k-1$.

3. Частный случай. Наиболее важным случаем будет тот, при котором каждая из функций f_i зависит только от t и производных $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и, следовательно, уравнения (1) имеют вид

$$\ddot{q}_i = f_i(t;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \quad (i=1, \ldots, n). \tag{11}$$

Такой случай часто встречается при исследовании движения диссипативных систем (например, снаряда или ракеты в воздухе, так как сопротивление воздуха зависит от скорости). Поэтому разыскание общего метода, одинаково применимого для всех задач с такого рода силами, представляет известный интерес.

Рассматриваемый случай характерен тем, что $L = L(t;\ q_{n+1}, \ldots, q_{2n};\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{2n})$, т. е. все основные переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ циклические. Отсюда мы видим, что полный процесс интегрирования системы уравнений (11) приводится к задаче интегрирования вспомогательной системы n лагранжевых уравнений вида:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial R}{\partial q_\rho} = 0 \quad (\rho = n+1, \ldots, 2n) \tag{12}$$

и к вычислению n квадратур

$$q_i = -\int \frac{\partial R}{\partial c_i}\,dt + b_i \quad (i=1, \ldots, n), \tag{13}$$

$$R = L - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i. \tag{14}$$

В функции R производные циклических переменных $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ заменены указанным выше способом, и потому

$$R = R(t;\ q_{n+1}, \ldots, q_{2n};\ \dot{q}_{n+1}, \ldots, \dot{q}_{2n};\ c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Таким образом, если известно частное решение $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ вспомогательной системы (12), то, вводя определяемые ими значения величин $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ в уравнения (13), мы получим общее решение первоначальной системы уравнений (11).

Что касается уравнений типа (12) или союзных им уравнений Гамильтона, то теория этих уравнений, как известно, разработана во многих деталях.

4. В заключение следует заметить, что метод, которым мы здесь пользовались, без каких-либо изменений можно применить к исследованию движения неконсервативных механических систем, теория интегрирования уравнений движения которых, как известно, почти не разработана.

Вычисления, проделанные для простейших неконсервативных механических систем, подтверждают данные выводы и целесообразность введения избыточных переменных.

Среднеазиатский
государственный университет
Ташкент

Поступило
25 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, 1937.