Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Н. ЧЕРНИКОВ

ОБ УСЛОВИИ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 27 IX 1950)

Введение. Если локально конечная p-группа $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она специальна, т. е. является конечным расширением прямого произведения конечного множества квази-циклических групп (1). Так как каждая абелева подгруппа произвольной группы содержится в некоторой максимальной абелевой подгруппе этой группы, то отсюда вытекает, что локально конечная p-группа $\mathfrak{P}$ будет специальной, если специальны все ее максимальные абелевы подгруппы. Легко убедиться, что в случае произвольной локально конечной p-группы из специальности какой-нибудь одной ее максимальной абелевой подгруппы вовсе не вытекает специальность других ее подгрупп такого рода. Примером, подтверждающим это высказывание, может служить p-группа без центра, построенная О. Ю. Шмидтом в его работе (2). Однако в случае p-групп, удовлетворяющих нормализаторному условию, специальность какой-либо одной максимальной абелевой подгруппы влечет за собой специальность всей группы и, значит, специальность всех ее максимальных абелевых подгрупп. Доказательству этого предложения и посвящается настоящая заметка.

1. Теорема 1. *Если $\mathfrak{P}$ — произвольная группа конечного класса (т. е. с центральным рядом конечной длины), то каждый ее элемент бесконечной высоты содержится в ее центре.*

Доказательство. Элемент p-группы $\mathfrak{P}$ называется элементом бесконечной высоты (относительно группы $\mathfrak{P}$), если для каждого натурального числа n его можно представить в виде произведения p^n-степеней некоторых элементов группы $\mathfrak{P}$. Пусть A — некоторый элемент бесконечной высоты относительно группы $\mathfrak{P}$ и X — произвольный ее элемент. Пусть p^α — порядок элемента X и c — класс группы $\mathfrak{P}$. Так как p^α-я степень элемента X содержится в каждом члене верхнего центрального ряда любой подгруппы группы $\mathfrak{P}$ и так как класс подгруппы не выше класса содержащей ее группы, то, прилагая теорему 3 из работы (3) к тем подгруппам, которые порождаются двумя элементами, из которых один есть X, получим, что элемент X будет перестановочен с $p^{\alpha(c-1)}$-й степенью каждого элемента из $\mathfrak{P}$.

Выберем теперь некоторое натуральное число n, превосходящее число $d(c-1)$. Так как элемент A имеет бесконечную высоту в группе $\mathfrak{P}$, то в ней можно найти такие элементы, что элемент A представится в виде их p^n-х степеней. Но $p^{\alpha(c-1)}$-я степень, а следовательно, и p^n-я степень каждого элемента группы $\mathfrak{P}$ перестановочна с элементом X. Следовательно, элемент A должен быть перестановочен с элементом X. Так как X — произвольный элемент группы $\mathfrak{P}$, то отсюда вытекает, что элемент A содержится в центре группы $\mathfrak{P}$.

2. Теорема 2. *Если p-группа $\mathfrak{P}$, обладающая возрастающим центральным рядом, имеет такой абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}$ и такую полную подгруппу $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{P}$, то группа $\mathfrak{P}$ абелева.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Z}_1$ и $\mathfrak{Z}_2$ — два первых члена верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{P}$. Так как группа $\mathfrak{B}$ абелева (см. [3]), то при $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{Z}_1$ наше предложение уже доказано. Следовательно, при $\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{Z}_2$ группа $\mathfrak{A}$ не содержится в $\mathfrak{Z}_1$. Опираясь на лемму 2 из [1], отсюда легко получаем, что пересечения $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{A}$ не совпадают.

Ряд

$$\mathfrak{A}_0 = 1 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}$$

является, очевидно, центральным рядом группы $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}$. Но тогда, ввиду конечности длины этого ряда и теоремы 1, группа $\mathfrak{B}$ должна содержаться в центре группы $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}$. Отсюда вытекает коммутативность группы $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}$. Следовательно, группа $\mathfrak{A}_2$ содержится в $\mathfrak{Z}_1$ и, значит, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2$. Так как группа $\mathfrak{P}$ обладает возрастающим центральным рядом, то это означает коммутативность группы $\mathfrak{P}$.

Теорема 3. *Если p-группа $\mathfrak{P}$, обладающая возрастающим центральным рядом, имеет такой неспециальный абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}$ и такую подгруппу $\mathfrak{B}$, что фактор-группа $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}'$, где $\mathfrak{B}'$ — максимальная полная подгруппа группы $\mathfrak{B}$, конечна и $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{P}$, то центр группы $\mathfrak{P}$ содержит бесконечно много элементов p-го порядка.*

Доказательство. Так как группа $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то группа $\mathfrak{P}$ является конечным расширением неспециальной абелевой группы $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$. Если $\mathfrak{P}'$ — группа, порожденная какими-нибудь представителями смежных классов группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, выбранными по одному из каждого класса, а $\mathfrak{A}'$ — подгруппа группы $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, порожденная ее элементами p-го порядка, то группа $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}'$ будет конечным расширением бесконечной группы $\mathfrak{A}'$ с ограниченными в совокупности порядками элементов. Но тогда центр группы $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}'$, а значит, и центр группы $\mathfrak{P}$ содержит бесконечно много элементов p-го порядка [5].

3. Теорема 4. *Если хотя бы одна максимальная абелева подгруппа $\mathfrak{A}$ p-группы $\mathfrak{P}$, обладающей возрастающим центральным рядом, специальна, то специальна и сама группа $\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Если группа $\mathfrak{P}$ не специальна, то, ввиду теоремы 4 из [6], все ее максимальные абелевы нормальные делители являются неспециальными группами. Пусть $\mathfrak{N}$ — какой-нибудь из таких нормальных делителей. Подгруппа $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{P}$ удовлетворяет, очевидно, условиям теоремы 3. Следовательно, в ее центре содержится бесконечно много элементов p-го порядка, что противоречит максимальности группы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{P}$. Следовательно, группа $\mathfrak{P}$ специальна.

4. Теорема 5. *Если хотя бы одна из максимальных абелевых подгрупп $\mathfrak{A}$ p-группы $\mathfrak{P}$, удовлетворяющей нормализаторному условию, специальна, то группа $\mathfrak{P}$ обладает возрастающим центральным рядом.*

Доказательство. Ввиду теоремы 5 из [7] группа $\mathfrak{P}$ обладает центральным множеством $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольный отличный от единицы член этого множества. Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{P}' = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{P}$. Будучи подгруппой группы $\mathfrak{P}$, удовлетворяющей нормализаторному условию, она также удовлетворяет нормализаторному условию и, значит, нормализатор $N(\mathfrak{A})$ группы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{P}'$ отличен от $\mathfrak{A}$. Но тогда пересечение $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap N(\mathfrak{A})$ должно быть отличным от единицы. Если $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{A} = 1$, то группы $\mathfrak{N}'$ и $\mathfrak{A}$, будучи нормальными делителями в группе $N(\mathfrak{A})$, перестановочны поэлементно, что противоречит максимальности в $\mathfrak{P}$ абелевой группы $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{A} \neq 1$. Так как $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, то и $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \neq 1$.

Ввиду упорядоченности множества $\mathfrak{M}$ и условия минимальности, которому, по предположению, удовлетворяет группа $\mathfrak{A}$, множество ее пересечений с отличными от единицы членами множества $\mathfrak{M}$ имеет минимальный элемент. Этот элемент, очевидно, содержится во всех отличных от единицы группах множества $\mathfrak{M}$. Следовательно, их пересечение $\mathfrak{D}_1$ отлично от единицы. Так как множество $\mathfrak{M}$ полное, то группа $\mathfrak{D}_1$ является элементом этого множества, причем, очевидно, в множестве $\mathfrak{M}$ нет членов, содержащихся между единичной группой и группой $\mathfrak{D}_1$. Но в таком случае, по определению центрального множества, группа $\mathfrak{D}_1$ содержится в центре группы $\mathfrak{P}$.

Легко показать теперь, что максимальная абелева подгруппа $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{D}_1$ из $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}_1$, содержащая группу $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}_1$, специальна. В самом деле, группа $\mathfrak{A}_1$ обладает центральным рядом и имеет специальную максимальную абелеву подгруппу $\mathfrak{A}$. Следовательно, ввиду теоремы 4, группа $\mathfrak{A}_1$ специальна. Но тогда специальной должна быть также и ее фактор-группа $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{D}_1$. Повторяя предыдущие рассуждения для групп $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{D}_1$, найдем, что центр группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}_1$ содержит отличную от единицы подгруппу $\mathfrak{D}_2/\mathfrak{D}_1$, причем максимальная абелева подгруппа $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{D}_2$ группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}_2$, содержащая группу $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{D}_2$, будет, ввиду теоремы 4, специальной. Рассмотрим далее группу $\mathfrak{D}_\omega\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{D}_\omega = \sum\limits_{i<\omega} \mathfrak{D}_i$. Через $\mathfrak{A}_\omega/\mathfrak{D}_\omega$ обозначим максимальную абелеву подгруппу группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}_\omega$, содержащую группу $\mathfrak{D}_\omega\mathfrak{A}/\mathfrak{D}_\omega$. Так как группа $\mathfrak{A}_\omega$ обладает центральным рядом и имеет специальную максимальную абелеву подгруппу $\mathfrak{A}$, то, ввиду теоремы 4, она специальна. Но тогда специальна также и ее фактор-группа $\mathfrak{A}_\omega/\mathfrak{D}_\omega$. Следовательно, в центре группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{D}_\omega$ существует отличная от единицы подгруппа $\mathfrak{D}_{\omega+1}/\mathfrak{D}_\omega$. Применяя к этим рассуждениям трансфинитную индукцию, легко установим существование возрастающего центрального ряда у группы $\mathfrak{P}$. Теорема доказана.

Теоремы 4 и 5 позволяют сформулировать следующее предложение.

Теорема 6. *Если хотя бы одна из максимальных абелевых подгрупп p-группы $\mathfrak{P}$, удовлетворяющей нормализаторному условию, специальна, то специальна также и сама группа $\mathfrak{P}$.*

В частности, если группа $\mathfrak{P}$, удовлетворяющая этому предложению, не имеет квази-циклических подгрупп, то она будет не только специальной, но даже конечной p-группой. Впрочем, пользуясь методом доказательства теоремы 5 и опираясь на очевидное предложение о том, что нормализатор конечной подгруппы в бесконечной локально конечной группе отличен от этой подруппы, легко получить следующий более общий результат.

Теорема 7. *Если локально конечная p-группа не имеет квази-циклических подгрупп и хотя бы одна ее максимальная абелева подгруппа конечна, то такая группа сама конечна.*

Поступило
20 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, ДАН, **63**, № 1 (1948). [2] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 8 (50): 3, 363 (1940). [3] С. Н. Черников, Матем. сборн., **18** (60): 3, 397 (1946). [4] С. Н. Черников, Матем. сборн., **22** (64): 2, 319 (1948). [5] С. Н. Черников, ДАН, **58**, № 7 (1947). [6] С. Н. Черников, ДАН, **72**, № 2 (1950). [7] С. Н. Черников, Матем. сборн., **13** (55), 317 (1943).