Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

С. А. КАГАНОВ

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ $n-1$-КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2 X 1950)

1. Как показал В. В. Вагнер (1), задание гиперареальной метрики в E_n равносильно заданию ковариантной векторной метрики в $\mathfrak{E}_n$ — центрально-аффинном пространстве векторных плотностей веса $+1$, ассоциированном с данным E_n. Если ковариантная метрика в $\mathfrak{E}_n$ регулярна (2), то гиперареальная метрика в E_n называется регулярной. Если ковариантная метрика в $\mathfrak{E}_n$ сингулярна и имеет класс сингулярности $n-m$, т. е. огибающей индикатрисы ковариантной метрики в $\mathfrak{E}_n$ является $m-1$-поверхность, то гиперареальная метрика в E_n называется сингулярной класса сингулярности $n-m$.

Мы будем рассматривать сингулярную гиперареальную метрику в E_n, заданную с помощью $m-1$-поверхности, дополненной некоторым образом до регулярной гиперполосы, т. е. $m-1$-поверхности вместе с заданной в каждой ее точке касательной гиперплоскостью. Такое задание будем называть внешним. Пусть регулярная гиперполоса в $\mathfrak{E}_n$ задана уравнениями:

$$x^\alpha = l^\alpha(\eta^a), \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, n;$$

$$y_\alpha = l_\alpha(\eta^a), \quad a, b, c, \ldots = 1, \ldots, m-1,$$

и пусть $n^\alpha_p(\eta^a)$, $p = 1, \ldots, n-m$, — векторы, определяющие характеристические $n-m$-плоскости гиперполосы (3). Построим геометрический объект

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{(n-1)!}\mathfrak{G}^{-1}\left(\mathfrak{E}^{\beta\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}\, l_\beta\, l_{\alpha_1 a_1}\cdots l_{\alpha_{m-1} a_{m-1}}\, n^{p_1}_{\alpha_m}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots n^{p_{n-m}}_{\alpha_{n-1}}\,\mathfrak{E}^{a_1\cdots a_{m-1}}\, e_{p_1\cdots p_{n-m}}\right)^2,$$

где

$$\mathfrak{G} = \mathrm{Det}\,|g_{ab}|, \quad g_{ab} = l^\alpha_a l_{\alpha b}, \quad l^\alpha_a = \frac{\partial}{\partial\eta^a} l^\alpha, \quad l_{\alpha a} = \frac{\partial}{\partial\eta^a} l_\alpha.$$

Векторам l^α, l_α, l^α_a, $l_{\alpha a}$, n^α_p, n^p_α, где n^p_α определяется из соотношений $l^\alpha n^p_\alpha = 0$, $l^\alpha_a n^p_\alpha = 0$, $n^\alpha_q n^p_\alpha = \delta^p_q$, можно теперь поставить в соответствие несобственные векторы в E_n по формулам:

$$\tilde{l}^\alpha = l^\alpha\,|\mathfrak{A}|^{1/2(n-1)}; \quad \tilde{l}^\alpha_a = l^\alpha_a\,|\mathfrak{A}|^{1/2(n-1)}; \quad \tilde{n}^\alpha_p = n^\alpha_p\,|\mathfrak{A}|^{1/2(n-1)};$$

$$\tilde{l}_\alpha = l_\alpha\,|\mathfrak{A}|^{-1/2(n-1)}; \quad \tilde{l}_{\alpha a} = l_{\alpha a}\,|\mathfrak{A}|^{-1/2(n-1)}; \quad \tilde{n}^p_\alpha = n^p_\alpha\,|\mathfrak{A}|^{-1/2(n-1)}.$$

Эти величины будут плотностями в характеристических $\mathfrak{E}_{n-m}$.

Пользуясь связностью на гиперполосе [3], можно получить

$$\nabla_c \ln \sqrt{|\mathfrak{A}|} = A_c,$$

A_c — вектор на гиперполосе.

Будем называть сингулярную гипереальную метрику класса сингулярности $n-m$, заданную внешним образом, регулярной в смысле Картана, если

$$\operatorname{Det} |C_{ab}| \neq 0, \quad C_{ab} = g_{ab} - \frac{1}{m-1} A^c_{ab} A_c + \frac{1}{(m-1)^2} A_a A_b.$$

При $m = n$, т. е. для регулярного случая, это условие введено Картаном [4].

2. В X_n задана внешним образом сингулярная гипереальная метрика класса сингулярности $n-m$, если в каждом касательном E_n задана соответствующая сингулярная гипереальная метрика внешним образом. Задание вышеопределенной метрики в X_n равносильно заданию поля гиперполос в $\mathfrak{E}_n$ (X_n). Пусть это поле задано уравнениями

$$x^\alpha = l^\alpha (\xi^\beta, \eta^a),$$

$$y_\alpha = l_\alpha (\xi^\beta, \eta^a).$$

Наряду с составным многообразием $X_{n+(m-1)}$, мы получаем составные многообразия $\mathfrak{E}_{m-1} (X_{n+(m-1)})$ и $\mathfrak{E}_{n-m} (X_{n+(m-1)})$ [3]. Пусть в $X_{n+(m-1)}$, $\mathfrak{E}_{m-1} (X_{n+(m-1)})$, $\mathfrak{E}_{n-m} (X_{n+(m-1)})$ введены линейные связности [3]. Разложим внешние абсолютные дифференциалы $[D\tilde{n}^p]$ и $[D\tilde{l}]$, где $\tilde{l} = \tilde{l}_\alpha d\xi^\alpha$, $\tilde{n}^p = \tilde{n}^p_\alpha d\xi^\alpha$, по $\frac{n(n-1)}{2}$ линейно независимым кососимметричным билинейным формам, полученным в результате попарного внешнего умножения форм Пфаффа $\tilde{l}$, ${}^*\tilde{l}_a = {}^*\tilde{l}_{\alpha a} d\xi^\alpha$, $\tilde{n}^p$:

$$[D\tilde{n}^p] = J^{pba} [{}^*\tilde{l}_b {}^*\tilde{l}_a] + 2J^{pbm} [{}^*\tilde{l}_b \tilde{l}] + 2J^{pb}_q [{}^*\tilde{l}_b \tilde{n}^q] +$$

$$+ 2J^p_{mq} [\tilde{l} \tilde{n}^q] + J^p_{rq} [\tilde{n}^r \tilde{n}^q],$$

$$[D\tilde{l}] = I^{ba} [{}^*\tilde{l}_b {}^*\tilde{l}_a] + 2I^{bm} [{}^*\tilde{l}_b \tilde{l}] + 2I^b_{\cdot q} [{}^*\tilde{l}_b \tilde{n}_q] + 2I_{mq} [\tilde{l} \tilde{n}^q] + I_{rq} [\tilde{n}^r \tilde{n}^q].$$

Вводя дифференциальные операторы D^a, D_m, D_p, D_a символическим равенством

$$D = {}^*\tilde{l}_a D^a + \tilde{l} D_m + \tilde{n}^p D_p, \quad D_a = g_{ab} D,$$

можно высказать следующую теорему:

Линейная связность в составных многообразиях $X_{n+(m-1)}$ и $\mathfrak{E}_{m-1} (X_{n+(m-1)})$ инвариантно определяется условиями

$$I^{ba} = 0, \quad I^b_{\cdot q} = 0, \quad I^{bm} = 0, \quad I_{mq} = 0;$$

$$J^{pb}_q = 0, \quad J^p_{mq} = 0, \quad J^p_{rq} = 0;$$

$$D_m g_{ab} + \frac{2}{m-1} D_{(a} A_{b)} = 0,$$

причем предполагается, что сингулярная гипереальная метрика регулярна в смысле Картана.

Связность в составном многообразии $\mathfrak{E}_{n-m}(X_{n+(m-1)})$ не определяется инвариантно указанными условиями. Однако ковариантное дифференцирование геометрических объектов, являющихся скалярными плотностями в $\mathfrak{E}_{n-m}$, однозначно определено.

Введем дифференциальную форму порядка $n-1$:

$$\omega = \varepsilon \,|\mathfrak{G}|^{-1/2}\, \mathfrak{E}^{a_1\cdots a_{m-1}} [{}^*\tilde{l}_{a_1} \cdots {}^*\tilde{l}_{a_{m-1}}\, \tilde{n}^{p_1} \cdots \tilde{n}^{p_{n-m}}]\, \mathfrak{e}_{p_1\cdots p_{n-m}},$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{sign} (\mathfrak{E}^{\beta\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}\, \mathfrak{E}^{a_1\cdots a_{m-1}}\, l_\beta\, l_{\alpha_1 a_1} \cdots l_{\alpha_{m-1} a_{m-1}}\, n^{p_1}_{\alpha_m} \cdots n^{p_{n-m}}_{\alpha_{n-1}}\, \mathfrak{e}_{p_1\cdots p_{n-m}}).$$

Вычисляя внешний абсолютный дифференциал $[D\omega]$ этой формы относительно введенной связности и пользуясь равенством

$$D_\alpha l^\alpha = \partial_\alpha l^\alpha - \Gamma^a_\alpha l^\alpha_a,$$

можно получить выражение для плотности средней кривизны гиперповерхности в X_n [1], заданной уравнениями

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t^i), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

именно

$$\mathfrak{h} = -\mathfrak{V}^i_a \frac{\delta\eta^a}{\partial t_i} + \frac{n-m}{(m-1)(n-1)} \tilde{D}^a A_a,$$

где

$$l^\alpha_a = \mathfrak{V}^i_a \xi^\alpha_i, \quad \tilde{D}_a = l^\alpha_a D_\alpha, \quad \tilde{D}^a = g^{ab} \tilde{D}_b.$$

3. Каждая экстремальная гиперповерхность может быть вмещена хотя бы в одно X^{n-1}_n нулевой средней кривизны [1]. Будем называть число $n-m+1-\nu$ классом данного X^{n-1}_n, где ν определяется следующим образом. Функции $\eta^a = \eta^a(\xi^\beta)$, входящие в определение данного X^{n-1}_n нулевой средней кривизны, подставляются в выражения

$$l_\alpha(\xi^\beta, \eta^a), \quad n^p_\alpha(\xi^\beta, \eta^a).$$

Теперь можно построить систему Пфаффа

$$l_\alpha(\xi^\beta, \eta^a(\xi^\beta))\, d\xi^\alpha = 0,$$

$$n^p_\alpha(\xi^\beta, \eta^a(\xi^\beta))\, d\xi^\alpha = 0;$$

ν есть число уравнений, входящих в систему Пфаффа, являющуюся системой интегрируемых комбинаций для данной. Решения системы интегрируемых комбинаций будем называть характеристическими многообразиями данного X^{n-1}_n.

Можно доказать теорему:

Экстремальная гиперповерхность, вмещенная в X^{n-1}_n класса $n-m+1-\nu$, распадается на характеристические многообразия данного X^{n-1}_n. Экстремальная гиперповерхность, которая может быть вмещена в X^{n-1}_n нулевого класса, единственным образом распадается на характеристические многообразия числа измерений $m-1$. Характеристические многообразия большего чем $m-1$ числа измерений, на которые может распадаться гиперповерхность, состоят из характеристических многообразий числа измерений $m-1$.

Пользуясь введенной линейной связностью, можно получить инвариантное выражение для второй вариации гиперплощади экстремали. При помощи этого выражения и последней теоремы можно обобщить условие Якоби, полученное Радоном ([5]) для случая $m=2$, на некоторые частные сингулярные задачи.

Поступило
1 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 144 (1950). [2] В. В. Вагнер, Там же, 7, 65 (1949). [3] В. В. Вагнер, Там же, 8, 197 (1950). [4] Е. Картан, 8-й Международн. конкурс на соискание премии им. Лобачевского. Отчет, Казань, 1940, стр. 145. [5] J. Radon, Jahrber. Deutsch. Math. Ver., 47, 220 (1937).