Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. А. ФРИДМАН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРА ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО МОДУЛЯМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВУХ ЕЕ СТЕПЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 IX 1950)

В силу классической теоремы единственности аналитическая функция полностью определяется коэффициентами своего разложения в степенной ряд. Однако задания одних модулей этих коэффициентов недостаточно даже для определения характера особенностей функций. Правда, для целых функций имеются классические формулы, устанавливающие точную зависимость между ростом модулей коэффициентов и ростом максимума модуля функции на окружности $|z|=r$. В настоящей заметке мы укажем, как определяется характер каждой изолированной особенности, если известны модули коэффициентов разложений функции в двух кольцах (или кругах), на общей граничной окружности которых лежит исследуемая особенность.

Мы рассматриваем здесь только такие изолированные особенности, в окрестности которых функция однозначна. Под характером особенности в точке z_0 функции $\psi(z)$ мы понимаем рост максимума модуля на окружности $|z|=r$ целой функции $h(z)$ такой, что $h\left(\frac{1}{z-z_0}\right)-\psi(z)$ будет правильной функцией в точке z_0. Соответственно порядком и типом особенности в точке z_0 называем порядок и тип целой функции $h(z)$. Кроме того, будем говорить, что целая функция (особенность) принадлежит к классу $[\rho, \mu]$, если она или имеет порядок $<\rho$ или имеет порядок ρ и тип $\leqslant \mu$. Целую функцию (особенность) будем считать принадлежащей классу $[\rho, \mu)$, если она или имеет порядок $<\rho$, или имеет порядок ρ и тип $<\mu$.

В частном случае задача была поставлена Г. Полиа ([1]):

Пусть $\psi(z)$ имеет в расширенной плоскости единственную особенность в точке 1; $\psi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z|<1$; $\psi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$, $|z|>1$. *Тогда, если $|a_n|=O(n^k)$ и $|b_n|=O(n^k)$, то $\psi(z)$ имеет в точке* 1 *полюс $(k+1)$-го порядка.*

Различные варианты доказательства этого предложения дали Н. Обрешков ([2]), Г. Сеге ([3]) и Н. Г. Чеботарев ([4]). А. И. Маркушевич поставил задачу: распространить этот результат на случай конечного числа особенностей и на случай произвольного роста коэффициентов $\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}=1,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}=1\right)$.

Теорема 1. *Если $\psi(z)$ имеет в расширенной плоскости единственную особенность в точке* 1 $\Big(\psi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z|<1$; $\psi(z)=$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, |z|>1\Big)$ *и* $|a_n| = O(e^{kn^\sigma})$, $|b_n| = O(e^{kn^\sigma})$, $0<\sigma<1$, *то эта особенность будет класса* $[\rho, \mu]$, *где* $\rho = \frac{\sigma}{1-\sigma}$ *и* $\mu = \frac{\left(k\sigma \sec \frac{\pi\sigma}{2}\right)^{1+\rho}}{\rho}$.

Теорема 2. *Если* $\psi(z)$ — *однозначная аналитическая функция, все особенности которой в расширенной плоскости лежат на единичной окружности* $\left(\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z|<1;\ \psi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},\ |z|>1\right)$ *и* $|a_n| = O(e^{kn^\sigma})$, $|b_n| = O(e^{kn^\sigma})$, *то каждая изолированная особенность функции* $\psi(z)$ *будет класса* $[\rho, \mu]$.

Теорема 3. *Если* $\psi(z)$ — *однозначная аналитическая функция, все особенности которой в кольце* $0 \leqslant r' < |z| < r'' \leqslant \infty$ *лежат на окружности* $|z| = r$, $r' < r < r''$ $\left(\psi(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c'_n z^n,\ r' < |z| < r;\ \psi(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c''_n z_n,\ r<|z|<r''\right)$ *и* $|c'_n| r^n = O(e^{kn^\sigma})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $|c''_{-n}| r^{-n} = O(e^{kn^\sigma})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *то на окружности* $|z| = r$ *каждая изолированная особенность функции* $\psi(z)$ *будет класса* $[\rho, \mu]$.

Все три теоремы можно распространить на случай $|a_n| = O(e^{\sigma(n)})$, где $\sigma(n) = o(n)$—монотонная функция такая, что $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sigma(x)}{1+x^2} dx < \infty$, а также на случай функций, представимых общими рядами Дирихле: $\psi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, $\operatorname{Re} z > 0$; $\psi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z}$, $\operatorname{Re} z < 0$, где $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n-1}|$ и существует $q > 0$ такое, что $|\lambda_n - \lambda_{n-1}| > q$ и $\operatorname{Re} \lambda_n > q |\operatorname{Im} \lambda_n|$.

Укажем одну интерпретацию задачи, решаемой теоремой 1. Пусть $\psi(z) = h\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, где $h(z)$ — целая функция. Тогда условия $|a_n| = O(e^{\sigma(n)})$ и $|b_n| = O(e^{\sigma(n)})$, где $\sigma(n) = o(n)$, равносильны условию $|\psi(z)| = O\left[\lambda\left(\left|\frac{1}{1-|z|}\right|\right)\right]$, где $\lambda\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{\sigma(n)} x^n$, $x<1$, или условию $|h(w)| = O\left[\lambda\left(\left|\frac{1}{1-r}\right|\right)\right]$ на окружности $\left|w - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| = \frac{2r}{|1-r^2|}$, так как преобразование $w = \frac{1+z}{1-z}$ переводит окружность $|z| = r$ в окружность $\left|w - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| = \frac{2r}{|1-r^2|}$.

Итак, задача принимает следующий вид: известен (асимптотически) максимум модуля целой функции на окружности $\left|w - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| = \frac{2r}{1-r^2}$. найти (асимптотически) максимум модуля этой целой функции на окружности $|w| = \frac{1}{1-r}$ $(r \to 1)$.

Г. Сеге ([3]) в своем доказательстве теоремы Полиа исходит из этой интерпретации и опирается на субгармоничность функции $|h(w)|^{\frac{1}{2(k+1)}}$. Метод Сеге позволяет распространить теорему Полиа на случай, когда $\ln|a_n| = O(n^\sigma)$ при $\sigma \leqslant {}^1/_2$; при этом приходится использовать субгармоничность функции $\ln|h(w)|$. Для $\sigma > {}^1/_2$ этот метод уже не годится, так как функция $\{\ln|h(w)|\}$ при $\alpha < 1$ не обязана быть субгармонической.

Доказательство теоремы 1 основано на следующих трех леммах.

Лемма 1. *Пусть $F(z)$ — целая функция класса $[1, \pi)$ и $|F(n)| = O\left(e^{kn^\sigma}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\sigma < 1$, тогда $|F(x)| = O\left(e^{kx^\sigma}\right)$ при $x > 0$.*

Эта лемма есть следствие теоремы М. Картрайт [5]:

Если $|F(n)| = O(1)$, то $|F(x)| = O(1)$.

Она точна, как показывают примеры функции Миттаг-Леффлера: $E_\sigma(k^{1/\sigma} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{n/\sigma} z^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\sigma}\right)} = \sigma e^{kz^\sigma} + O\left(\frac{1}{1 + |z|}\right)$ при $\operatorname{Re} z > 0$ и функции $e^z \sin \pi z$.

Лемма 2. *Пусть $F(x)$ — целая функция класса $[1, 0]$ и $F(x) = O\left(e^{k|x|^\sigma}\right)$ при $\operatorname{Im} x = 0$ и $\sigma < 1$; тогда $F(z)$ будет класса $\left[\sigma, k \sec \frac{\sigma\pi}{2}\right]$.*

Эта лемма — следствие теоремы Фрагмена-Линделёфа. Она точна, как показывают примеры функции Миттаг-Леффлера порядка σ и типа $k \sec(\sigma\pi/2)$:

$$E_\sigma\left[-i\left(k \sec \frac{\sigma\pi}{2}\right)^{1/\sigma} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(k \sec \frac{\sigma\pi}{2}\right)^{n/\sigma} (-i)^n z^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\sigma}\right)} =$$

$$= \sigma e^{kz^\sigma (1 - i \operatorname{tg}(\sigma\pi/2))} + O\left(\frac{1}{1 + |z|}\right)$$

при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и функции $\sin \alpha z$ при любом $\alpha > 0$.

Лемма 3. (Теорема А. О. Гельфонда [6]). *Для того чтобы целая функция $F(z)$ была порядка $\sigma < 1$ и типа k, необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) z^n$ имела в точке 1 особенность (единственную в расширенной плоскости по теореме Вигерта-Ло) порядка $\rho = \frac{\sigma}{1 - \sigma}$ и типа $l = \frac{(k\sigma)^{1+\rho}}{\rho}$.*

Теперь легко докажем теорему 1.

По теореме Вигерта-Ло существует целая функция $F(z)$ класса $[1, 0]$ такая, что $F(n) = a_n$ и $F(-n) = -b_n$. Применяя в функции $F(z)$ поочередно леммы 1, 2 и 3, мы убеждаемся, что $\psi(z)$ имеет в точке 1 особенность класса $[\rho, \mu]$.

Теорема 1 точна, как показывает пример функции $\psi_\sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_\sigma\left[-i\left(k \sec \frac{\sigma\pi}{2}\right)^{1/\sigma} n\right] z^n$, $|z| < 1$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $e^{i\varphi_0}$ — какая-нибудь изолированная особенность функции $\psi(z)$. Путем поворота, т. е. заменой $\psi^*(z) = \psi(ze^{i(\varphi_0 - \lambda)})$, можно добиться того, что $\psi^*(z)$ будет регулярна на дугах $(e^{i(\lambda-\varepsilon)}, e^{i\lambda})$ и $(e^{i\lambda}, e^{i(\lambda+\varepsilon)})$, где $0 < \varepsilon < \lambda = \pi - \varepsilon/2$. Кроме того, можно считать, что $\psi^*(\infty) = 0$. Положим $\psi^*(z) = \psi_\lambda(z) + \psi_\mu(z)$, где $\psi_\lambda(z)$ $(\psi_\lambda(\infty) = 0)$ имеет единственную в расширенной плоскости особенность в точке $z = e^{i\lambda}$ и $\psi_\mu(z)$ — правильная функция в этой точке, и вводим функцию $\tilde{\psi}_\lambda(z) = \psi_\lambda(ze^{i\lambda})$.

Функции $\psi^*(z)$, $\psi_\lambda(z)$, $\tilde{\psi}_\lambda(z)$, $\psi_\mu(z)$ однозначные и аналитические в расширенной плоскости вне дуги единичной окружности $|\arg z| < k < \pi$ и равны 0 в точке $z = \infty$. Для такой функции $\psi(z)$ введем ассоциированную целую функцию [7] $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi(t) t^{-z-1} dt$, где C — контур, отделяющий дугу $|z| = 1$, $|\arg z| < k$, от точек $z = 0$ и $z = \infty$, пробегаемый по часовой стрелке. Очевидно, $F(n)=\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n\psi(z)}{dz^n}\right|_{z=0}$ и $F(-n)=-\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n\psi\left(\frac{1}{z}\right)}{dz^n}\right|_{z=0}$. Нетрудно убедиться, что $F(z)$ — целая функция класса $[1, k]$. Полагая $f(z)=\int\limits_0^\infty F(x)e^{-zx}dx$, $\operatorname{Re}(zx)>0$, можно показать, что функция $f(z)-\psi(e^{-z})$ будет аналитической в круге $|z|<\pi$. Так как $e^{-(1-z)}=z+o(1)$ при $z\to 1$, то функции $\psi(e^{-z})$ и $\psi(z)$ в точке $z=1$ имеют особенности одного и того же характера.

Очевидно, что $F^*(z)=F_\lambda(z)+F_\mu(z)$ и $f^*(z)=f_\lambda(z)+f_\mu(z)$. Кроме того, $F_\lambda(z)=\widetilde{F}_\lambda(z)e^{-i\lambda z}$ и $f_\lambda(z)=\widetilde{f}_\lambda(z+i\lambda)$, т. е. $f^*(z)=\widetilde{f}_\lambda(z+i\lambda)+f_\mu(z)$ и, ввиду регулярности в окрестности точки $z=-i\lambda$ функции $f_\mu(z)$, вблизи этой точки имеем: $|\widetilde{f}_\lambda(z+i\lambda)|=O(|f^*(z)|)$.

Функция $F^*(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1, поэтому $|F^*(x)|=O\left(e^{k|x|^\sigma}\right)=O\left[E_\sigma\left(k^{1/\sigma}|x|\right)\right]$; отсюда имеем: $|f^*(z)|=$ $=O[f_\sigma(|\operatorname{Re}z|)]=O\left[\psi_\sigma\left(e^{-|\operatorname{Re}z|}\right)\right]$, где $f_\sigma(z)=\int\limits_0^\infty E_\sigma(k^{1/\sigma}x)e^{-zx}dx$ и $\psi_\sigma(z)=$ $=\sum\limits_{n=0}^\infty E_\sigma(k^{1/\sigma}n)z^n$.

Наконец, по лемме 3, функция $\psi_\sigma(z)$ имеет в точке $z=1$ особенность порядка ρ и типа $l=\frac{(k\sigma)^{1+\rho}}{\rho}$, т. е. $|\widetilde{f}_\lambda(z+i\lambda)|=O\left(e^{l\left|\frac{1}{\operatorname{Re}z}\right|^\rho}\right)$ вблизи точки $z=-i\lambda$ или $|\widetilde{f}_\lambda(1-z)|=O\left(e^{l\left|\frac{1}{\operatorname{Re}z}\right|^\rho}\right)=O\left(e^{l\left|\frac{1}{1-|z|}\right|^\rho}\right)$ вблизи точки $z=1$.

Далее, $|\widetilde{\psi}_\lambda(z)|=O\left(|\widetilde{\psi}_\lambda(e^{-(1-z)})|\right)=O\left(|\widetilde{f}_\lambda(1-z)|\right)=O\left(e^{l\left|\frac{1}{1-|z|}\right|^\rho}\right)$. Но тогда $|\widetilde{a}_n|=O\left(e^{kn^\sigma}\right)$ и $|\widetilde{b}_n|=O\left(e^{kn^\sigma}\right)$, где $\widetilde{\psi}_\lambda(z)=\sum\limits_{n=0}^\infty\widetilde{a}_nz^n$, $|z|<1$, и $\widetilde{\psi}_\lambda(z)=\sum\limits_{n=1}^\infty\widetilde{b}_nz^{-n}$, $|z|>1$ [8], и функция $\widetilde{\psi}_\lambda(z)$, по теореме 1, имеет в точке $z=1$ особенность класса $[\rho, \mu]$, следовательно, $\psi(z)$ имеет особенность того же класса в точке $z=e^{i\varphi_0}$.

Доказательство теоремы 3. Представим $\psi(z)$ в виде $\psi(z)=\psi_1(z)+\psi_2(z)$, где $\psi_1(z)=\sum\limits_{n=0}^\infty a_nz^n$, $|z|<r$; $\psi_1(z)=\sum\limits_{n=1}^\infty b_nz^{-n}$, $|z|>r$ и $\psi_2(z)=\sum\limits_{-\infty}^\infty c_nz^n$, $r'<|z|<r''$. Тогда, пользуясь формулами Коши для коэффициентов степенных рядов, найдем, что $a_n=c'_n-c''_n$ и $b_n=c''_{-n}-c'_{-n}$, $n=1, 2, \ldots$. А так как $|c''_n|r^n=o(1)$ и $|c'_{-n}|r^{-n}=$ $=o(1)$ при $n>0$, то $|a_n|r^n=O\left(e^{kn^\sigma}\right)$ и $|b_n|r^{-n}=O\left(e^{kn^\sigma}\right)$. У функции $\widetilde{\psi}_1(z)=\psi_1(zr)$, по теореме 2, каждая изолированная особенность принадлежит классу $[\rho, \mu]$. Очевидно, то же верно и для $\psi_1(z)$, следовательно, и для $\psi(z)$.

Поступило
22 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Polya, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 43, 11 (1933). [2] Н. Обрешков, ibid. [3] G. Szegö, ibid. [4] Н. Г. Чеботарев, ibid. [5] M. Cartwright, Journ. Math., Oxford ser., 7, No. 25 (1936). [6] А. О. Гельфонд, Матем. сборн., 36, (1929). [8] G. Polya, Math. Zs., 29 (1929). [8] M. Fujiwara, Proc. Imp. Acad. Jap., 8 (1932).