Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

(Представлено академиком И. Г. Петровским 5 X 1950)

Основой для исследования, результаты которого представляют содержание настоящего сообщения, послужила работа А. Н. Тихонова (1).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_k, z_l),$$
$$\mu \frac{dz_j}{dt} = F_j(t, y_k, z_l), \quad \mu > 0, \tag{1}$$

решение которой

$$y_i(t, \mu), \quad z_j(t, \mu) \tag{2}$$

определяется условиями

$$y_i|_{t=0} = y_i^0, \qquad z_j|_{t=0} = z_j^0.$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что $i, k = 1, 2, \ldots, n$; $j, l = 1, 2, \ldots, m$.

Полагая в (1) $\mu = 0$, получаем вырожденную систему

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_k, z_l), \tag{3'}$$

$$F_j(t, y_k, z_l) = 0. \tag{3''}$$

Будем изучать поведение функций (2) при $\mu \to 0$ и их связь с решениями вырожденной системы (3).

Пусть уравнения (3″) удовлетворяются функциями $z_j = \varphi_j(t, y_k)$, определенными в некоторой области D пространства t, y_k. Предположим, что правые части (1) непрерывны, а $\varphi_j(t, y_k)$ имеют ограниченные частные производные по всем переменным. Пусть система функций $z_j = \varphi_j(t, y_k)$ является устойчивым корнем (3″) в области $D_1 \subset D$. Это означает существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$F(t, y_k, z_l) = \sum_{j=1}^{m} (z_j - \varphi_j(t, y_k)) F_j(t, y_k, z_l) < 0 \tag{4}$$

для любой точки (t, y_k, z_l), для которой $z_j \neq \varphi_j(t, y_k)$, точка (t, y_k) принадлежит D_1, $r = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} [z_j - \varphi_j(t, y_k)]^2} < \varepsilon$. Пусть, наконец, начальная точка $(0, y_k^0, z_l^0)$ принадлежит области влияния устойчивого корня $\varphi_j(t, y_k)$, определяемой как множество точек (t', y'_k, z'_l), для которых функции $z_j(\tau)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{dz_j}{d\tau} = F_j(t', y'_k, z_l) \tag{5'}$$

и условиям

$$z_j|_{\tau=0} = z'_j, \tag{5''}$$

стремятся при $\tau \to \infty$ к значениям $\varphi_j(t', y'_k)$.

Как показано в [1], при выполнении всех перечисленных требований имеют место предельные равенства:

$$\lim_{\mu \to 0} y_i(t, \mu) = \bar{y}_i(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

$$\lim_{\mu \to 0} z_j(t, \mu) = \varphi_j(t, \bar{y}_k(t)), \quad 0 < t \leqslant T,$$

где $\bar{y}_i(t)$ определяются условиями

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_i}{dt} &= f_i(t, \bar{y}_k, \varphi_l(t, \bar{y}_k)), \\ \bar{y}_i|_{t=0} &= y_i^0. \end{aligned} \tag{6}$$

Величина T такова, что для $t \leqslant T$ точка $(t, y_k(t, \mu))$ не выходит из области устойчивости D_1.

Работа, результаты которой приводятся ниже, посвящена рассмотрению дифференцируемости по параметру μ решения (2) системы (1). Результаты исследования того же вопроса для случая $j = 1$ опубликованы в [2].

Выделим в пространстве (t, y_k, z_l) некоторую ограниченную область, для которой $0 \leqslant t \leqslant T$ и из которой не выходит решение (2) системы (1) для всех рассматриваемых t.

Относительно правых частей в (1) сделаем следующие дополнительные предположения. Пусть функции $f_i(t, y_k, z_l)$ и $F_j(t, y_k, z_l)$ обладают непрерывными частными производными первого порядка по всем аргументам в указанной области. Введем для этих производных обозначения

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} = f_{ik}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z_l} = f_{il}, \quad \frac{\partial F_j}{\partial y_k} = F_{jk}, \quad \frac{\partial F_j}{\partial z_l} = F_{jl}.$$

Будем считать, что определитель матрицы $\| F_{jl} \|$ не обращается в нуль. Предположим, кроме того, что F_j обладают непрерывными частными производными второго порядка. В этих предположениях условие устойчивости (4) сводится к условию отрицательной определенности квадратичной формы $\sum_{j,l} (z_j - \varphi_j(t, y_k))(z_l - \varphi_l(t, y_k)) F_{jl}$, когда $r < \varepsilon$ и когда точка (t, y_k) принадлежит D_1. Если выполняются все перечисленные условия, то будем для краткости называть систему (1) принадлежащей к типу H.

Обозначим $\partial y_i / \partial \mu = \eta_i$, $\partial z_j / \partial \mu = \zeta_j$. Относительно поведения $\eta_i(t, \mu)$ и $\zeta_j(t, \mu)$ при $\mu \to 0$ поставим тот же вопрос, что и относительно поведения самих функций $y_i(t, \mu)$ и $z_j(t, \mu)$: существуют ли предельные функции $\bar{\eta}_i(t)$ и $\bar{\zeta}_j(t)$; какой системой уравнений и какими дополнительными условиями эти предельные функции определяются.

Функции $\eta_i(t, \mu)$ и $\zeta_j(t, \mu)$ удовлетворяют системе линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от t, $y_k(t, \mu)$ и $z_l(t, \mu)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dt} &= f_{ik}\eta_k + f_{il}\zeta_l, \\ \mu\frac{d\zeta_j}{dt} &= F_{jk}\eta_k + F_{jl}\zeta_l - \frac{dz_j}{dt} \end{aligned} \tag{7}$$

(знаки суммирования по k и l опускаем) и начальным условиям

$$\eta_i|_{t=0} = 0, \quad \zeta_j|_{t=0} = 0.$$

Вырожденную систему запишем следующим образом:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \bar{f}_{ik}\eta_k + \bar{f}_{il}\zeta_l, \tag{8'}$$

$$\bar{F}_{jk}\eta_k + \bar{F}_{jl}\zeta_l - \frac{d\varphi_j}{dt}(t, \bar{y}_k(t)) = 0; \tag{8''}$$

черта над характеристикой функции означает, что функция берется от аргументов t, $\bar{y}_k(t)$, $\varphi_j(t, \bar{y}_k(t))$. Система (8″) однозначно разрешима относительно ζ_j, так что $\zeta_j = \psi_j(t, \eta_k)$. Подставляя $\zeta_j = \psi_j$ в (8′), получаем систему уравнений

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \bar{f}_{ik}\eta_k + \bar{f}_{il}\psi_l(t, \eta_k). \tag{9}$$

Удается показать, что существуют предельные функции $\bar{\eta}_i(t)$ и $\bar{\zeta}_j(t)$ такие, что $\lim\limits_{\mu \to 0} \eta_i(t, \mu) = \bar{\eta}_i(t)$, $\lim\limits_{\mu \to 0} \zeta_j(t, \mu) = \bar{\zeta}_j(t)$. Связь функций η_i со своими предельными функциями $\bar{\eta}_i$ аналогична связи y_i с $\bar{y}_i$ в том отношении, что как $\bar{y}_i$, так и $\bar{\eta}_i$ удовлетворяют вырожденным системам (6) и (9), соответственно, получающимся одинаковым образом из основных систем (1) и (7). Однако, в то время как $y_i(t, \mu)$ и $\bar{y}_i(t)$ принимают одинаковые начальные значения y_i^0, начальные значения $\eta_i(t, \mu)$ и $\bar{\eta}_i(t)$ различны.

Теорема. *Если система* (1) *принадлежит к типу* H, *то*

1°. $\lim\limits_{\mu \to 0} \eta_i(t, \mu) = \bar{\eta}_i(t), \quad 0 < t \leqslant T.$

Функции $\bar{\eta}_i(t)$ *представляют решение системы уравнений* (9), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\bar{\eta}_i|_{t=0} = \int\limits_0^\infty [f_i(0, y_k^0, z_l(\tau)) - f_i(0, y_k^0, \varphi_l(0, y_k^0))]\, d\tau,$$

причем $z_j(\tau)$ *определяются системой уравнений и условиями* (5′) *и* (5″), *где надо положить* $t' = 0$, $y'_k = y^0_k$, $z'_j = z^0_j$.

2°. $\lim\limits_{\mu \to 0} \zeta_j(t, \mu) = \overline{\zeta}_j(t) = \psi_j(t \;\; \eta_k(t)), \quad 0 < t \leqslant T.$

Каково бы ни было $t_1 > 0$, *стремление к пределам равномерно относительно* t *на отрезке* $[t_1, T]$.

Поступило
24 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., **27** (69), № 1 (1950). [2] А. Б. Васильева, ДАН, **61**, № 4 (1948).