Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

О ФУНКЦИЯХ, ПРОИЗВОДНЫЕ КОТОРЫХ УДОВЛЕТВОРЯЮТ НЕКОТОРЫМ НЕРАВЕНСТВАМ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 IX 1950)

1. Обозначим через $f(x)$ функцию, допускающую при $x>a$ производные всех порядков, и через x_0 — действительное число, большее a. Мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(x_0-x)e^{-x}=(x_0+k-x)e^{-x} \tag{1}$$

при $a<x\leqslant x_0+k$ и $k=0,1,2,\ldots$, то $f(x)=C(x_0-x)e^{-x}$, где C — некоторая постоянная, причем $|C|\leqslant 1$.

Доказательство. Функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд, который сходится всюду, как это видно из неравенств (1). Таким образом, это целая функция.

Покажем, что $f(z)$ можно разложить в ряд Абеля

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_0+\tau\nu)\frac{(x_0-z)(x_0+\tau\nu-z)^{\nu-1}}{\nu!}$$

при всех значениях z, если $0<\tau<1$.

Покажем сначала, что функцию $(x_0-z)e^{-z}$ можно разложить в ряд Абеля

$$(x_0-z)e^{-z}=\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\tau)e^{-x_0-\tau\nu}\frac{(x_0-z)(x_0+\tau\nu-z)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \tag{2}$$

при $0<\tau<1$.

Ряд

$$\varphi_\tau(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\tau)e^{-x_0-\tau\nu}\frac{(x_0-z)(x_0+\tau\nu-z)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \tag{3}$$

сходится равномерно во всякой ограниченной области значений z, как это видно из неравенства

$$\left|(1-\tau)e^{-x_0-\tau\nu}\frac{(x_0-z)(x_0+\tau\nu-z)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{1-\tau}{\tau}e^{-x_0}(x_0-z)\left(1+\frac{x_0-z}{\tau\nu}\right)^{\nu-1}\right|(e^{1-\tau}\tau)^{\nu}.$$

Поэтому $\varphi_\tau(z)$ является целой функцией от z. Мы покажем, что эта функция совпадает с функцией $(x_0 - z)\, e^{-z}$ при всех действительных значениях $z = x$, не превосходящих x_0, откуда будет следовать, что $\varphi_\tau(z) \equiv (x_0 - z)\, e^{-z}$.

Для этого рассмотрим остаточный член абелева разложения функции $(x_0 - x)\, e^{-x}$. Положив для краткости $x_0 + \tau\nu = x_\nu$, при $x < x_0$ имеем

$$0 \leqslant R_n(x) = \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \ldots \int_{t_n}^{x_n} (x_{n+1} - t_{n+1})\, e^{-t_{n+1}}\, dt_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant (x_{n+1} - x)\, e^{-x} \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \ldots \int_{t_n}^{x_n} dt_{n+1} \leqslant (x_0 - x)\, e^{-x} \left(1 + \frac{x_0 + \tau - x}{\tau^n}\right)^n (\tau e)^n.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, по крайней мере, при $0 < \tau < 1/e$. Для того чтобы установить разложимость функции $(x_0 - z)\, e^{-z}$ в ряд Абеля при всех значениях τ, удовлетворяющих неравенствам $0 < \tau < 1$, будем изучать ряд (3) при постоянном z как функцию от τ, рассматривая τ как комплексное переменное в прямоугольнике G, определяемом неравенствами $\alpha < \mathrm{Re}(\tau) < \beta$, где $0 < \alpha < \beta < 1$ и $-\gamma < \mathrm{Im}(\tau) < \gamma$, где положительное число γ удовлетворяет неравенствам $\gamma^2 < \alpha(1 - \beta)$ и $e^{1-\beta}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} < 1$. Для комплексных значений τ, лежащих в G, получаем

$$\left| (1 - \tau)\, e^{-x_0 - \tau\nu} \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu - 1}}{(\nu - 1)!} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1 + \beta + \gamma}{\alpha} e^{-x_0} |x_0 - z| \left(1 - \frac{|x_0 - z|}{\alpha\nu}\right)^{\nu - 1} \left(e^{1-\beta}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}\right)^\nu,$$

и, так как $0 < e^{1-\beta}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} < 1$, то заключаем, что ряд (3) сходится равномерно в прямоугольнике G и, следовательно, определяет аналитическую функцию от τ. Выше мы установили, что эта аналитическая функция $\varphi_\tau(z)$ является постоянной $(x_0 - z)\, e^{-z}$ при действительных значениях τ в промежутке $0 < \tau < 1/e$. Из этого вытекает, что она равна той же постоянной $(x_0 - z)\, e^{-z}$ и во всем прямоугольнике G, а следовательно, и в промежутке $0 < \tau < 1$, ввиду того, что α и β ограничены только условием $0 < \alpha < \beta < 1$. Итак, при всех комплексных значениях z и при всех (действительных) значениях τ, для которых $0 < \tau < 1$, справедлива формула (2).

Теперь нетрудно установить разложимость в ряд Абеля целой функции $f(z)$. В силу неравенств (1) и (4) ряд

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu f^{(\nu)}(x_0 + \tau\nu) \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu - 1}}{\nu!}$$

сходится на всей плоскости и определяет некоторую целую функцию $g(z)$. Мы покажем, что эта функция совпадает с функцией $f(z)$ при всех действительных значениях x из промежутка (a, x_0). Это обеспечит совпадение функций $f(z)$ и $g(z)$ при всех комплексных значениях z. Рассмотрим остаточный член абелева разложения функции $f(x)$. На основании неравенств (1) получаем при $a < x < x_0$

$$|r_n(x)| = \left| (-1)^{n+1} \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \ldots \int_{t_n}^{x_n} f^{(n+1)}(t_{n+1})\, dt_{n+1} \right| \leqslant R_n(x), \qquad (4)$$

откуда вытекает разложимость функции $f(x)$ в ряд Абеля при $0 < \tau < 1$ и $a < x < x_0$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ в силу разложимости функции $(x_0 - x)\, e^{-x}$.

Докажем теперь, что при всех комплексных значениях z выполняется неравенство

$$|f(z)| \leqslant A|(x_0 - z)e^{-z}| \tag{5}$$

при подходящем выборе постоянной A.

Пусть $z = x + iy$, где x и y — действительные числа. Обозначая через N целое число, большее, чем $4|x_0 - x|$ и чем $2y^2$, заключаем, что при $\tau > {}^1/_2$ и $\nu > N$ имеем

$$1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu} > \frac{1}{2}, \quad \frac{y^2}{\tau\nu} < 1. \tag{6}$$

Отметим, что N не зависит от τ. Пользуясь неравенствами (6), получаем

$$|x_0 + \tau\nu - z|^{\nu-1} = (\tau\nu)^{\nu-1}\left(1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu}\right)^{\nu-1}\left[1 + \frac{y^2}{\tau^2\nu^2\left(1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu}\right)^2}\right]^{\frac{\nu-1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (\tau\nu)^{\nu-1}\left(1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu}\right)^{\nu-1}\left[1 + \frac{8}{\nu}\right]^{\frac{\nu-1}{2}} \leqslant A(x_0 + \tau\nu - x)^{\nu-1}, \tag{7}$$

где A — какая-нибудь верхняя грань выражения $\left(1 + \frac{8}{\nu}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}$ и не зависит от τ и z. Далее, пользуясь неравенствами (1) и (7), находим, что при ${}^1/_2 < \tau < 1$

$$|f(z)| \leqslant \left|\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^\nu f^{(\nu)}(x_0 + \tau\nu)\frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu-1}}{\nu!}\right| +$$

$$+ \frac{A|x_0 - z|}{x_0 - x}\left[(x_0 - x)e^{-x} - \sum_{\nu=1}^{N}(1 - \tau)e^{-x_0 - \tau\nu}\frac{(x_0 - x)(x_0 + \tau\nu - x)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!}\right].$$

Выполняя переход к пределу $\tau \to 1$ при постоянном z, получим неравенство (5), так как, с одной стороны, $\lim\limits_{\tau\to 1} f^{(\nu)}(x_0 + \tau\nu) = 0$, а с другой, N и A не зависят от τ.

Для завершения доказательства теоремы применяем теорему Лиувилля к целой функции $\frac{f(z)}{(x_0 - z)e^{-z}}$ и заключаем в силу (5), что она равна постоянной; итак, $f(z) = C(x_0 - z)e^{-z}$. Неравенство $|C| \leqslant 1$ вытекает из неравенств (1). Теорема доказана.

2. Рассмотрим полином

$$P_\nu(x) = \frac{(x_0 - x)(x_0 + \tau\nu - x)^{\nu-1}}{\nu!},$$

где ν — целое неотрицательное число. Нетрудно установить, что если неравенства

$$|f^{(k)}(x) \leqslant (-1)^k P_\nu^{(k)}(x)$$

выполнены при $a < x \leqslant x_0 + k$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $f(x) = CP_\nu(x)$, где C — некоторая постоянная, причем $|C| \leqslant 1$. Мы показали недавно [1], что теория рядов Абеля получает новое освещение, если наряду с полиномами $P_\nu(x)$ рассматривать все функции $\varphi(x)$, для которых из неравенств $|f^{(k)}(x)| \leqslant (-1)^k\varphi^{(k)}(x)$ при $a < x \leqslant x_0 + k$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$

вытекает равенство $f(x)=C\varphi(x)$. Таковой является функция $(x_0-x)e^{-x}$. С этой точки зрения мы изучали также ряды Дирихле и интегральное уравнение Лапласа ([2]), пользуясь тем ([3–5]), что из неравенств $|f^{(k)}(x)|\leqslant\lambda^k e^{-\lambda x}$, выполненных при $x>a$, вытекает неравенство $f(x)=Ce^{-\lambda x}$, если $\lambda\geqslant 0$.

Поступило
5 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Тагамлицкий, Годишник на Софийския университет, **45**, 263 (1948—1949). [2] Я. Тагамлицкий, там же, **44**, 317 (1947—1948). [3] J. Tagamlitzki, C. R., **223**, 940 (1946). [4] R. P. Boas, C. R., **224**, 1683 (1947). [5] M. Loève, C. R., **225**, 31 (1947).