Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИМИТИВНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 IX 1950)

В предлагаемой работе определяются все максимальные подгруппы в полупростых группах Ли (до настоящего времени максимальные подгруппы не были найдены даже в группе всех матриц n-го порядка с детерминантом 1). Классическая задача перечисления примитивных преобразований, поставленная еще С. Ли и решенная им для групп, действующих в пространствах 1, 2 и 3 измерений ([1]), эквивалентна задаче об определении в группах Ли максимальных подгрупп, не содержащих нетривиальных нормальных делителей группы (см., например, ([2])). Случай, когда группа не является простой, был изучен В. В. Морозовым в 1939 г. ([3]). Таким образом, результаты настоящей заметки представляют окончательное решение задачи С. Ли.

Проведенная нами классификация максимальных подгрупп основывается на двух исследованиях. А. Определяются все отношения включения между неприводимыми линейными группами. Б. В каждой из особых простых групп G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 вычисляются все подгруппы, не содержащиеся ни в какой регулярной подгруппе. В соединении с ([4]) это дает таблицу всех полупростых подгрупп в каждой из особых групп и, таким образом, восполняет пробел, имеющийся в работе А. И. Мальцева ([5]), где не найдены подгруппы групп E_6, E_7, E_8.

Исследование А существенно использует результаты ([6]), а исследование Б основано на предварительном вычислении во всех простых группах всевозможных подгрупп ранга 1 *. Основные результаты настоящей работы формулируются в виде теорем 1—4 **.

Задача разыскания максимальных подгрупп в полупростых группах сводится тривиально к аналогичной задаче для простых групп.

I. Максимальные подгруппы в группах A_n. Легко найти максимальные среди линейных групп, оставляющих инвариантными некоторое линейное многообразие или некоторую билинейную форму. Таковыми являются: 1) группа всех линейных преобразований, переводящих в себя фиксированное линейное подпространство R^k; 2) группа всех ортогональных преобразований; 3) группа всех симплектических преобразований (всюду рассматриваются только преобразования с

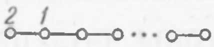
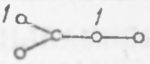
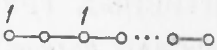
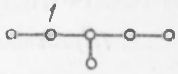
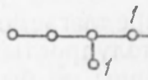
* Подгруппы ранга 1 в классических группах A_n, C_n, B_n, D_n были определены еще Ф. Р. Гантмахером ([7]). Из особых групп А. И. Мальцевым рассматривались G_2 и F_4. Число подгрупп ранга 1 в особых группах (с точностью до сопряженности) равно: в G_2 4, в F_4 15 (а не 14, как ошибочно указано А. И. Мальцевым), в E_6 20, в E_7 44, в E_8 71. Пользуясь случаем, заметим, что конструкция так называемых «главных подгрупп ранга 1», составляющая содержание заметки Зибенталя ([8]) (представлена 20 II 1950 г.), содержится в нашей заметке ([6]) (представлена 5 I 1950 г.) (см. доказательство теоремы 4).

** Уточним, что под группой Ли всюду понимается локальная группа с комплексными параметрами.

детерминантом 1). Неприводимые непростые максимальные подгруппы в группах A_n исчерпываются подгруппами $A_k \times A_l$ *.

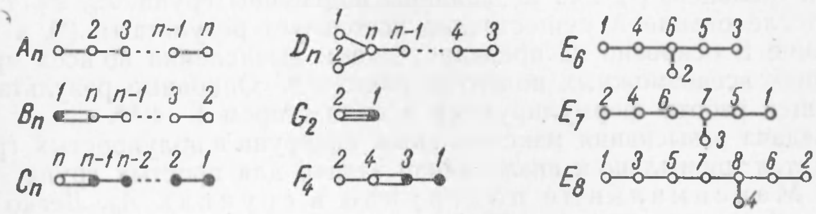
Теорема 1. *В группах серии A_n всякая подгруппа, неприводимая, простая и не имеющая билинейных инвариантов, является максимальной, за исключением подгрупп, перечисленных в табл. 1.*

Таблица 1

Подгруппа	Группа	Старш. вес соотв. представления	Подгруппа	Группа	Старш. вес соотв. представления
A_k	$A_{1/6\, k(k+1)(k+2)(k+3)-1}$		D_5	A_{599}	
A_k	$A_{1/6\, (k-1)k(k+1)(k+2)-1}$		E_6	A_{351}	
			E_6	A_{17549}	

В пояснение к табл. 1 заметим, что неприводимые подгруппы групп серии A_n, рассматриваемые с точностью до сопряженности, находятся во взаимно-однозначном соответствии с неприводимыми представлениями полупростых групп, рассматриваемыми с точностью до эквивалентности и до внешних автоморфизмов представляемой группы (см. ([5])). Поэтому неприводимые подгруппы можно задавать картановскими старшими весами соответствующих представлений. В соответствии с ([6]), мы задаем старший вес Λ, изображая схему простых корней представляемой группы и надписывая около кружочка схемы, отвечающего простому корню α, значение $\Lambda_\alpha = \frac{2(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ (значения $\Lambda_\alpha = 0$ при этом опускаются). Для того чтобы перейти к обозначениям Картана ([9]), достаточно занумеровать простые корни в порядке, указанном в табл. 2,

Таблица 2



и рассмотреть линейную форму $\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{\alpha_i} \Pi_i$, где $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ — картановские базисные веса ([9]). Например, подгруппе D_5 в группе A_{599} отвечает в картановских обозначениях старший вес $\Pi_1 + \Pi_4$.

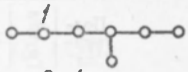
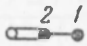
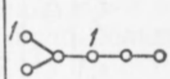
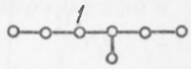
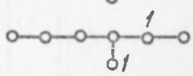
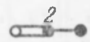
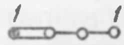
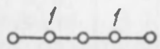
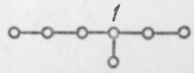
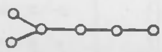
II. Максимальные подгруппы в группах B_n, C_n и D_n. Подгруппы групп B_n, C_n и D_n можно задавать как линейные группы, оставляющие инвариантной некоторую невырожденную билинейную форму $Q(x, y)$, симметрическую в случае B_n и D_n и кососимметрическую в случае C_n. Основанное на таком представлении перечисление полупростых подгрупп в B_n, C_n, D_n было дано А. И. Мальцевым ([5]) (см. также ([6])). Нетрудно показать, что все максимальные среди при-

* Если M и N — два множества матриц, то $M \times N$ обозначает множество всевозможных кронекеровских произведений $X \times Y$, где $X \in M$, $Y \in N$.

водимых подгрупп описываются следующим образом: фиксируется некоторое пространство R^k, на котором основная форма $Q(x, y)$ является невырожденной или тождественно равна нулю, и рассматривается совокупность всех ортогональных (или симплектических) преобразований, переводящих R^k в себя ([10]). Неприводимые непростые максимальные подгруппы в группах B_n, C_n, D_n имеют вид $O(k)\times O(l)$, $O(k)\times C_l$, $C_k\times C_l$ ($O(r)$ обозначает множество всех ортогональных матриц порядка r с детерминантом 1).

Теорема 2. *В группах серий B_n, C_n и D_n все неприводимые простые подгруппы являются максимальными, за исключением перечисленных в табл. 3.*

Таблица 3

Подгруппа	Группа	Старш. вес соотв. представления	Подгруппа	Группа	Старш. вес соотв. представления
B_{2k+1}	$D_{2^{2k+1}}$ для нечетн. k		E_7	B_{769}	
	$C_{2^{2k+1}}$ для четного k		C_3	C_{175}	
B_3	D_m, если $C^7_{k+7}=2m$		D_6	C_{2464}	
	B_m, если $C^7_{k+7}=2m+1$		E_7	C_{13832}	
G_2	D_m, если $C^6_{k+6}=2m$		E_7	$C_{1896048}$	
	B_m, если $C^6_{k+6}=2m+1$		C_3	D_{45}	
A_1	B_3		B_4	D_{64}	
A_5	B_{94}		E_7	D_{182875}	
D_6	B_{247}				

III. Максимальные подгруппы в особых группах G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Проводившееся для классических групп A_n, B_n, C_n, D_n, расчленение общей задачи на определение: 1) приводимых максимальных подгрупп и 2) неприводимых максимальных подгрупп — заменяется теперь другим расчленением, носящим более внутренний характер, а именно, на определение: а) регулярных максимальных подгрупп и б) нерегулярных максимальных подгрупп. Задача б) для неполупростых подгрупп была впервые решена В. В. Морозовым ([10]). Новое, более простое решение получено Ф. И. Карпелевичем. Дадим решение задачи а) для полупростых подгрупп.

Теорема 3. *Пусть G — полупростая алгебра Ли; Π — система простых корней G; Π' — какая-нибудь система, получающаяся из Π элементарным преобразованием* ([4]). *Образуем наименьшую подалгебру G, содержащую корневые векторы e_α, $e_{-\alpha}$ для всех $\alpha\in\Pi'$. Среди подалгебр G, построенных этим способом, содержатся представители всех классов сопряженных полупростых регулярных максимальных подалгебр. Табл. 4 дает полное перечисление таких классов для особых алгебр G_2, F_4, E_6, E_7* (ср. ([4])).

Пусть вообще, $\mathfrak{G}$ — некоторая группа Ли и $\mathfrak{G}$ — ее подгруппа. Присоединенное представление $g\to A_g$ ($g\in\mathfrak{G}$) группы $\mathfrak{G}$ индуцирует представление $g\to A_g$ ($g\in\mathfrak{G}$) подгруппы $\mathfrak{G}$. Это последнее всегда разла-

Таблица 4

Подгруппы	Группы	Подгруппы	Группы	Подгруппы	Группы
$A_1 + A_2$	G_2	$A_5 + A_1$	E_6	A_8	E_8
A_2		$A_2 + A_2 + A_2$		D_8	
B_4	F_4	$D_6 + A_1$	E_7	$A_4 + A_4$	
$A_1 + A_3$		$A_2 + A_5$		$A_2 + E_6$	
$A_3 + A_2$		$A_3 + A_1 + A_3$		$A_1 + E_7$	
$C_3 + A_1$		A_7			

гается на представление, являющееся присоединенным для $\mathfrak{G}$, и некоторое дополнительное представление, которое мы назовем **характеристическим представлением подгруппы** $\mathfrak{G}$.

Таблица 5

Решение задачи б) дает следующая теорама.

Теорема 4. *Нерегулярные максимальные подгруппы особых групп G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 определяются однозначно с точностью до сопряженности своими характеристическими представлениями. Классификация таких подгрупп дается табл. 5.* (Характеристическое представление, вообще говоря, приводимо. В таблице перечисляются старшие веса всех его неприводимых компонент.)

Поступило
22 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Lie, Theorie der Transformationgruppen, 3, Leipzig, 1893, S. 122. [2] Н. Г. Чеботарев, Теория группы Ли, М.— Л., 1940, стр. 37—40. [3] В. В. Морозов, Матем. сборн., 5 (47), 2, 355 (1939). [4] Е. Б. Дынкин, ДАН, 73, № 5 (1950). [5] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, 143 (1944). [6] Е. Б. Дынкин, ДАН, 71, № 2 (1950). [7] Ф. Гантмахер, Рефераты Отд. физ.-мат. наук АН СССР, М., 1940. [8] J. Siebenthal, C. R., 230, 10, 910 (1950). [9] E. Cartan, Bull. Soc. Math. de France, 41, 53 (1913). [10] В. В. Морозов, О неполупростых максимальных подгруппах простых групп. Диссертация, Казань, 1943.