Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 2

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. Г. ЛУНЦ

СИНТЕЗ И АНАЛИЗ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1950)

Метод, предлагаемый мною в настоящей статье, сводит преобразования релейно-контактных электрических схем общего типа к алгебраическим операциям над некоторыми функциями. Терминологию и обозначения сохраняю те же, что и в своей предыдущей статье [4].

§ 1. Характеристические функции. Сопоставим заданному n-полюснику A функцию

$$f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta,$$

коэффициентами которой служат элементы матрицы A.

Оказывается, для того, чтобы два n-полюсника A и B были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = f_B(x_1, \ldots, x_n)$$

при всех значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из $\mathfrak{A}$ (впрочем, достаточно ограничиться для переменных значениями 0 и 1).

Точно так же неравенство $\chi(A) \leqslant \chi(B)$ равносильно неравенству $f_A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f_B(x_1, \ldots, x_n)$. Функцию $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы будем называть характеристической функцией многополюсника A.

Таким образом, преобразование n-полюсника A в эквивалентный n-полюсник B сводится к преобразованию характеристической функции $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ в равную ей характеристическую функцию $f_B(x_1, \ldots, x_n)$ и наоборот.

Так например, эквивалентность

$$A\bar{X} + Y \sim A$$

при условии

$$\chi(X) \leqslant \chi(Y) \leqslant \chi(A)$$

равносильна равенству

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} (a_{\alpha,\beta} \bar{x}_{\alpha,\beta} + y_{\alpha,\beta}) x_\alpha \bar{x}_\beta = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta$$

при условии

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} x_{\alpha,\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta \leqslant \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} y_{\alpha,\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta \leqslant \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta.$$

§ 2. Исключение и введение переменных. На практике часто приходится рассматривать n-полюсник как изображение релейно-контактной схемы с меньшим числом полюсов (например, как изображение некоторой двухполюсной схемы), остальные полюса играют лишь вспомогательную роль. Поэтому при преобразовании такой схемы необходимо, чтобы не изменялись только некоторые элементы характеристики, а не вся характеристика. Любое такое преобразование релейно-контактной схемы может быть получено с помощью «исключения» и «введения» вспомогательных переменных.

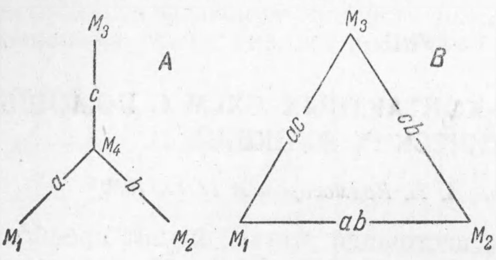

Рис. 1

Переход от функции $f(x)$ к ее точной нижней границе[1] $f(0)\cdot f(1)$ будем называть «исключением» переменной x из функции $f(x)$ (в обозначениях: $(Ex)f(x)=f(0)\cdot f(1)$), а обратную операцию (восстановление функции по ее точной нижней границе) будем называть «введением» переменной. Обратная операция, в отличие от прямой, неоднозначна.

Если из характеристической функции $f_A(x_1,\ldots,x_n)$ исключим переменную x_n, то в результате получим опять характеристическую функцию некоторого $(n-1)$-полюсника B:

$$(Ex_n)f_A(x_1,\ldots,x_n)=f_A(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\cdot f_A(x_1,\ldots,x_{n-1},1)=f_B(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

причем имеют место равенства

$$\chi_{\alpha,\beta}(A)=\chi_{\alpha,\beta}(B) \quad \text{при } \alpha,\beta=1,2,\ldots,n-1.$$

Процесс исключением можно производить и непосредственно над матрицей A:

$$B\sim\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & \ldots a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1}\ldots & \ldots a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{1,n} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{n-1,n}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_{n,1}\ldots a_{n,n-1}\end{vmatrix}.$$

С помощью исключения можно производить анализ многополюсника. Действительно, исключая последовательно $x_n, x_{n-1},\ldots,x_3$ (порядок безразличен) из $f_A(x_1,\ldots,x_n)$, мы придем к функции $\chi_{1,2}(A)\,x_1\bar{x}_2+\chi_{2,1}(A)\,x_2\bar{x}_1$ и тем самым определим $\chi_{1,2}(A)$ и $\chi_{2,1}(A)$. Окончательный результат можно записать в виде формулы

$$\chi_{1,2}(A)=(Ex_3)(Ex_4)\ldots(Ex_n)f_A(1,0,x_3,\ldots,x_n).$$

При одновременном исключении переменных $x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n$ будем иметь

$$(Ex_{m+1})\ldots(Ex_n)f_A(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{x_{m+1},\ldots,x_n=0}^{1} f_A(x_1,\ldots,x_n)=f_B(x_1,\ldots,x_m),$$

где теперь

$$B\sim A_{1,1}+A_{1,2}\times\chi(A_{2,2})\times A_{2,1}$$

и $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$ обозначают части матрицы A:

$$A = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix},$$

причем имеет место равенство

$$\chi(B) = \begin{vmatrix} \chi_{1,1}(A) \ldots \chi_{1,m}(A) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{m,1}(A) \ldots \chi_{m,m}(A) \end{vmatrix}.$$

Впрочем, практически бывает проще исключать переменные последовательно.

Существенно, что и обратный процесс последовательного введения переменных вполне практически осуществим. Для этого прежде всего заметим, что

$$(Ex)(ax + b\bar{x} + c) = ab + c.$$

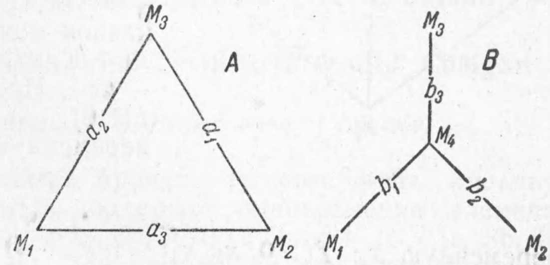

Рис. 2

Чтобы в характеристическую функцию $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ ввести новую переменную, представим ее в виде

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + f_C(x_1, \ldots, x_n).$$

Если ограничиваться только симметрическими матрицами (схемами без вентильных элементов), то необходимо, чтобы $a_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

После этого новая переменная может быть введена следующим образом:

$$x_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i + \bar{x}_{n+1} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + f_C(x_1, \ldots, x_n).$$

§ 3. Примеры на применение метода. В заключение рассмотрим три простых примера.

Пример 1. Преобразование «звезды» в «треугольник». Рассмотрим четырехполюсник A (рис. 1), в котором полюс M_4 играет лишь вспомогательную роль. Имеем $f_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(x_1\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_1) + b(x_2\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_2) + c(x_3\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_3)$. Исключим вспомогательную переменную x_4: $(Ex_4) f_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1 + bx_2 + cx_3)(a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c\bar{x}_3) = bc(x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2) + ca(x_3\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_3) + ab(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1) = f_B(x_1, x_2, x_3)$. Получившийся трехполюсник B изображен на рис. 1.

Пример 2. Преобразование «треугольника» в «звезду». Рассмотрим трехполюсник A (рис. 2). Для характеристической функции имеем выражение: $f_A(x_1, x_2, x_3) = a_1(x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2) + a_2(x_3\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_3) + a_3(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1)$. Принимая во внимание, что $a_1x_2\bar{x}_3 + a_2x_3\bar{x}_1 \geqslant (Ex_3)(a_1x_2\bar{x}_3 + a_2x_3\bar{x}_1) = a_1a_2x_2\bar{x}_1$ и аналогичные неравенства, можем написать $f_A(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + a_2a_3)(x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2) + (a_2 + a_3a_1)(x_3\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_3) + (a_3 + a_1a_2)(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1)$. Обозначая $a_2 + a_3 = b_1$, $a_3 + a_1 = b_2$, $a_1 + a_2 = b_3$, получим: $f_A(x_1, x_2, x_3) = b_2b_3(x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2) + b_3b_1(x_3\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_3) + b_1b_2(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1) = (b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3)(b_1x_1 +$

$+ b_2x_2 + b_3x_3)$. Вводя вспомогательную переменную x_4, получим $f_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = (b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3)\, x_4 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)\, \bar{x}_4 = b_1(x_1\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_1) + b_2(x_2\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_2) + b_3(x_3\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_3)$. Получившийся четырехполюсник B изображен на рис. 2.

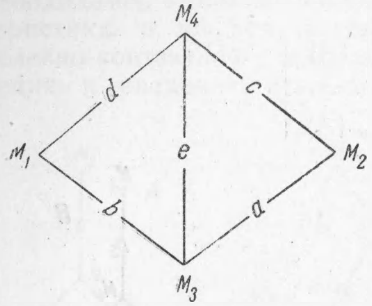

Рис. 3

Пример 3. Мостик Уинстона. Построим двухполюсную схему без вентильных элементов с заданной проводимостью $\chi_{1,2} = ab + acd + bec + dc$. Характеристическая функция этого двухполюсника: $f(x_1, x_2) = (ab + acd + bec + dc)(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1)$. Для упрощения выкладок можно с самого начала положить $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $f(1, 0) = ab + acd + bec + dc$. Преобразуем это выражение: $f(1, 0) = (a + ec)(b + ed) + dc$. Введем переменную x_3: $f(1, 0, x_3) = (a + ec)\, x_3 + (b + ed)\, \bar{x}_3 + dc$. Далее, $f(1, 0, x_3) = (ex_3 + d)(e\bar{x}_3 + c) + ax_3 + b\bar{x}_3$. Вводим переменную x_4: $f(1, 0, x_3, x_4) = (ex_3 + d)\, \bar{x}_4 + (e\bar{x}_3 + c)\, x_4 + ax_3 + b\bar{x}_3 = e(x_3\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_3) + d\bar{x}_4 + cx_4 + ax_3 + b\bar{x}_3$. Последнее означает, что $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = e(x_3\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_3) + d(x_1\bar{x}_4 + x_4\bar{x}_1) + c(x_4\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_4) + a(x_3\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_3) + b(x_3\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_3)$, и получившийся четырехполюсник имеет вид, изображенный на рис. 3.

Поступило
16 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Кутюра, Алгебра логики, 1909. [2] В. Шестаков, Автоматика и телемеханика, 2, 15 (1941). [3] М. А. Гаврилов, Электричество, 2, 54 (1946). [4] А. Г. Лунц, ДАН, 70, № 3 (1950).