Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. М. ДАРЕВСКИЙ

К ВОПРОСУ О ДЕЙСТВИИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ НЕКОТОРЫХ НАГРУЗОК

(Представлено академиком М. В. Келдышем 12 IX 1950)

В статье ([1]), касающейся вопроса о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки, эта последняя рассматривалась как предельный случай нагрузки, распределенной по элементу $s \in S$*, для которого $|x| \leqslant a/2$, $|y| \leqslant b/2$, с некоторыми постоянными составляющими Q_ν/ab ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) и равной нулю вне элемента s. Такую нагрузку назовем элементарной.

Настоящая заметка касается вопроса о действии на тонкую круговую цилиндрическую оболочку элементарной нагрузки и нагрузок, получающихся в пределе, когда a или $b \to 0$, т. е. нагрузок, равномерно распределенных по отрезкам образующей и направляющего круга поверхности S. Будут указаны простые асимптотические формулы, позволяющие определить в окрестностях угловых точек нагруженной площадки s и в окрестностях концевых точек нагруженных отрезков образующей и направляющего круга те внутренние силовые факторы, которые не ограничены в этих окрестностях.

Для получения упомянутых асимптотических формул можно исходить из частного решения основных уравнений теории цилиндрической оболочки при элементарной нагрузке, приведенного в статье ([1]). При этом решении все неизвестные (перемещения и внутренние силовые факторы) представляются выражениями

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(i)} (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi), \tag{1}$$

смысл которых разъяснен в статье ([1]). Представляя функции $f_{\nu n}(\xi)$ в виде

$$f_{\nu n}(\xi) = f_{\nu n 1}(\xi) + f_{\nu n 2}(\xi),$$

где функции $f_{\nu n 2}(\xi)$ подобраны специальным образом (фигурирующие в статье ([1]) функции $f_{\nu n 2}^{00}(\xi)$ являются $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}} f_{\nu n 2}(\xi)$), удается выделить неограниченную часть того или иного выражения (1) в замкнутой форме.

---

* Мы будем пользоваться обозначениями, введенными в статье ([1]), не поясняя их смысла.

С некоторыми оговорками можно доказать, что

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} L_{\nu}^{(t)}(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} L_{\nu}^{(t)}(f_{\nu n}^{0b}(\xi)\cos n\varphi), \tag{2}$$

$$\lim_{b\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} L_{\nu}^{(t)}(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} L_{\nu}^{(t)}(f_{\nu n}^{a0}(\xi)\cos n\varphi), \tag{3}$$

где

$$f_{\nu n}^{0b}(\xi)=\lim_{a\to 0} f_{\nu n}(\xi),\quad f_{\nu n}^{a0}(\xi)=\lim_{b\to 0} f_{\nu n}(\xi).$$

Выражения (2) и (3) определяют перемещения и внутренние силовые факторы, соответственно, при нагрузке, равномерно распределенной по отрезку направляющего круга, и при нагрузке, равномерно распределенной по отрезку образующей. С помощью представлений

$$f_{\nu n}^{0b}(\xi)=f_{\nu n1}^{0b}(\xi)+f_{\nu n2}^{0b}(\xi),\quad f_{\nu n}^{a0}(\xi)=f_{\nu n1}^{a0}(\xi)+f_{\nu n2}^{a0}(\xi),$$

где

$$f_{\nu n1\,(2)}^{0b}(\xi)=\lim_{a\to 0} f_{\nu n1\,(2)}(\xi),\quad f_{\nu n1\,(2)}^{a0}(\xi)=\lim_{b\to 0} f_{\nu n1\,(2)}(\xi),$$

удается выделить неограниченную часть того или иного из выражений (2) и (3) в замкнутой форме.

Отмеченные обстоятельства позволяют установить, что только в окрестностях упомянутых ранее точек те или иные из искомых величин могут быть неограниченными, выяснить, какие именно искомые величины являются неограниченными, и получить для них приводимые ниже асимптотические формулы.

Если нагрузка распределена по отрезку ($\xi=0$, $|\varphi|\leqslant\beta=b/2R$) направляющего круга, то в окрестностях концевых точек этого отрезка имеют место следующие асимптотические равенства, которые мы объединяем в группы в зависимости от вида входящих в них выражений.

Первая группа асимптотических формул:

$$S_1^{(1)}\simeq -S_2^{(1)}\simeq \mp(8\pi R\beta)^{-1}(1-\sigma)\,Q_1\ln\rho \quad (\rho^2=\xi^2+(\varphi\pm\beta)^2),$$

$$H_1^{(1)}=-H_2^{(1)}\simeq\pm(192\pi R^2\beta)^{-1}(1+\sigma)(5+\sigma)\,h^2Q_1\ln\rho;$$

$$(1-\sigma)^{-1}T_1^{(2)}\simeq-(3+\sigma)^{-1}T_2^{(2)}\simeq\pm(8\pi R\beta)^{-1}Q_2\ln\rho,$$

$$-(25-\sigma^2)^{-1}G_1^{(2)}\simeq(1-\sigma)^{-1}(11-\sigma)^{-1}G_2^{(2)}\simeq\pm(192\pi R^2\beta)^{-1}h^2Q_2\ln\rho;$$

$$4\pi R\beta N_2^{(3)}\simeq\mp Q_3\ln\rho;$$

$$T_1^{(4)}\simeq-(3+2\sigma)^{-1}T_2^{(4)}\simeq\pm(32\pi R^2\beta)^{-1}\,Q_4\ln\rho,$$

$$G_1^{(4)}\simeq G_2^{(4)}\simeq\pm(16\pi R\beta)^{-1}(1+\sigma)\,Q_4\ln\rho;$$

$$-(1+\sigma-\sigma^2)^{-1}S_1^{(5)}\simeq(3-3\sigma+\sigma^2)^{-1}S_2^{(5)}\simeq\pm(16\pi R^2)^{-1}Q_5\ln\rho,$$

$$H_1^{(5)}=-H_2^{(5)}\simeq\pm(8\pi R\beta)^{-1}Q_5\ln\rho.$$

Вторая группа асимптотических формул:

$$N_2^{(1)}\simeq\pm(96\pi R^3\beta)^{-1}(1+\sigma)h^2Q_1\xi\rho^{-2}\{2(\varphi\pm\beta)^2[3\xi^2-(\varphi\pm\beta)^2]\rho^{-4}-10(\varphi\pm\beta)\rho^{-2}-3\};$$

$$N_1^{(2)} \simeq \pm (96\pi R^3\beta)^{-1} h^2 Q_2 \xi \rho^{-2} \{2(1+\sigma)(\varphi \pm \beta)^2 [3\xi^2 - (\varphi \pm \beta)^2] \rho^{-4} + 2(9+\sigma)(\varphi \pm \beta)^2 \rho^{-2} - 7 + \sigma\};$$

$$2Q_4^{-1} N_1^{(4)} \simeq - Q_5^{-1} N_2^{(5)} \simeq \pm (4\pi R^2\beta)^{-1} \xi \rho^{-2}.$$

Третья группа асимптотических формул:

$$N_1^{(1)} \simeq \pm (96\pi R^3\beta)^{-1} (1+\sigma) h^2 Q_1 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2} \{2\xi^2 [3\xi^2 - (\varphi \pm \beta)^2] \rho^{-4} - 10\xi^2 \rho^{-2} + 3\};$$

$$N_2^{(2)} \simeq \mp (96\pi R^3\beta)^{-1} h^2 Q_2 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2} \{2\xi^2 [3\xi^4 + 2\xi^2 (\varphi \pm \beta)^2 - (\varphi \pm \beta)^4] \rho^{-6} - 4\xi^2 [(5-3\sigma)\xi^2 + (5+\sigma)(\varphi \pm \beta)^2] \rho^{-4} + [(13-10\sigma)\xi^2 + 19(\varphi \pm \beta)^2] \rho^{-2} + 8 + 3\sigma\};$$

$$N_2^{(4)} \simeq \pm (128\pi R^2\beta)^{-1} Q_4 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2} \{2\xi^2 [3\xi^4 + 2\xi^2 (\varphi \pm \beta)^2 - (\varphi \pm \beta)^4] \rho^{-6} - 2\xi^2 [13\xi^2 + 9(\varphi \pm \beta)^2] \rho^{-4} + [10\xi^2 + 19(\varphi \pm \beta)^2] \rho^{-2} - 3\};$$

$$N_1^{(5)} \simeq \pm (4\pi R^2\beta)^{-1} Q_5 (\varphi \pm \beta) \rho^{-2}.$$

В этих формулах верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = -\beta$, а нижние — окрестности точки $\xi = 0$, $\varphi = \beta$. Любая из приведенных формул справедлива в указанных окрестностях за исключением, быть может, точек линии $\xi = 0$ и за исключением сколь угодно малых углов со сторонами $(\varphi \pm \beta)/\xi = C \pm \varepsilon$, содержащих особые линии $(\varphi \pm \beta)/\xi = C = \mathrm{const}$, вдоль которых правая часть данной формулы исчезает (вдоль таких линий у рассматриваемого силового фактора понижается порядок роста).

Если нагрузка распределена по отрезку $(|\xi| \leqslant \alpha = a/2R,\ \varphi = 0)$ образующей, то в окрестностях концевых точек этого отрезка справедливы асимптотические равенства, которые мы объединяем в следующие три группы.

Первая группа асимптотических формул:

$$-(3+\sigma)^{-1} T_1^{(1)} \simeq (1-\sigma)^{-1} T_2^{(1)} \simeq (8\pi R\alpha)^{-1} Q_1 \ln \rho \quad (\rho^2 = (\xi \pm \alpha)^2 + \varphi^2),$$

$$(3+\sigma)^{-1} G_1^{(1)} \simeq (1-\sigma)(1+2\sigma-\sigma^2)^{-1} G_2^{(1)} \simeq \pm (192\pi R\alpha)^{-1} (1+\sigma) h^2 Q_1 \ln \rho;$$

$$S_1^{(2)} \simeq -S_2^{(2)} \simeq \mp (8\pi R\alpha)^{-1} (1-\sigma) Q_2 \ln \rho,$$

$$H_1^{(2)} = -H_2^{(2)} \simeq \mp (192\pi R^2\alpha)^{-1} (11+2\sigma-\sigma^2) h^2 Q_2 \ln \rho;$$

$$N_1^{(3)} \simeq \mp (4\pi R\alpha)^{-1} Q_3 \ln \rho;$$

$$(7-3\sigma)^{-1} S_1^{(4)} \simeq (1-5\sigma)^{-1} S_2^{(4)} \simeq \mp (128\pi R^2)^{-1} Q_4 \ln \rho,$$

$$H_1^{(4)} = -H_2^{(4)} \simeq \mp (16\pi R\alpha)^{-1} (1-\sigma) Q_4 \ln \rho;$$

$$(1-2\sigma)^{-1} T_1^{(5)} \simeq -\frac{1}{3} T_2^{(5)} \simeq \pm (16\pi R^2\alpha)^{-1} Q_5 \ln \rho,$$

$$8(13+3\sigma)^{-1} G_1^{(5)} \simeq (1+\sigma)^{-1} G_2^{(5)} \simeq \mp [8\pi(1-\sigma) R\alpha]^{-1} Q_5 \ln \rho.$$

Вторая группа асимптотических формул:

$$N_1^{(1)} \simeq \pm (96\pi R^3\alpha)^{-1} (1+\sigma) h^2 Q_1 (\xi \pm \alpha) \rho^{-2} \{2\varphi^2 [3(\xi \pm \alpha)^2 - \varphi^2] \rho^{-4} - 2\varphi^2 \rho^{-2} + 1\};$$

$$N_2^{(2)} \simeq \mp (96\pi R^3\alpha)^{-1} h^2 Q_2 (\xi \pm \alpha) \rho^{-2} \{2\varphi^2 [3(\xi \pm \alpha)^2 - \varphi^2] \rho^{-4} - 2(9+\sigma)\varphi^2 \rho^{-2} - 7 + \sigma\};$$

$$2Q_4^{-1} N_2^{(4)} \simeq Q_5^{-1} N_1^{(5)} \simeq \mp (4\pi R^2\alpha)^{-1} (\xi \pm \alpha) \rho^{-2}.$$

Третья группа асимптотических формул:

$$N_2^{(1)} \simeq \mp (48\pi R^3\alpha)^{-1}(1+\sigma)\,h^2 Q_1 \varphi\rho^{-2}\Big\{(\xi\pm\alpha)^2\,[3\,(\xi\pm\alpha)^2-\varphi^2]\,\rho^{-4}-$$

$$-5\,(\xi\pm\alpha)\,\rho^{-2}+\frac{3}{2}\Big\};$$

$$N_1^{(2)} \simeq \mp (48\pi R^3\alpha)^{-1} h^2 Q_2 \varphi\rho^{-2}\Big\{(1+\sigma)\,(\xi\pm\alpha)^2\,[3\,(\xi\pm\alpha)^2-\varphi^2]\,\rho^{-4}-$$

$$-(9+\sigma)\,(\xi\pm\alpha)\,\rho^{-2}+\frac{7-\sigma}{2}\Big\};$$

$$2Q_4^{-1}N_1^{(4)} \simeq -Q_5^{-1}N_2^{(5)} \simeq \pm (4\pi R^2\alpha)^{-1}\varphi\rho^{-2}.$$

Здесь верхние знаки соответствуют окрестности точки $\xi=-\alpha$, $\varphi=0$, а нижние — окрестности точки $\xi=\alpha$, $\varphi=0$. Любая из приведенных сейчас формул справедлива в указанных окрестностях за исключением, быть может, точек линий $\xi\pm\alpha=0$, а также отрезка $|\xi|\leqslant\alpha$, $\varphi=0$, если речь идет о формуле для $N_1^{(5)}$, и за исключением сколь угодно малых углов со сторонами $\varphi/(\xi\pm\alpha)=C\pm\varepsilon$, содержащих особые линии $\varphi/(\xi\pm\alpha)=C=\mathrm{const}$, вдоль которых правая часть данной формулы исчезает (вдоль таких линий у рассматриваемого силового фактора понижается порядок роста).

В случае, когда нагрузка распределена по элементу s ($|\xi|\leqslant\alpha$, $|\varphi|\leqslant\beta$), в окрестностях угловых точек этого элемента выполняются следующие асимптотические равенства:

$$(1+\sigma)^{-1}Q_1^{-1}N_2^{(1)} \simeq 3\,(7-\sigma)^{-1}Q_2^{-1}N_1^{(2)} \simeq \mp (64\pi R^3\alpha\beta)^{-1}h^2 \ln\rho,$$

$$2Q_4^{-1}N_1^{(4)} \simeq -Q_5^{-1}N_2^{(5)} \simeq \pm (8\pi R^2\alpha\beta)^{-1}\ln\rho,$$

где верхние знаки соответствуют окрестностям точек $\xi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и $\xi=-\alpha$, $\varphi=-\beta$, а нижние знаки — окрестностям точек $\xi=\alpha$, $\varphi=-\beta$ и $\xi=-\alpha$, $\varphi=\beta$. В данном случае

$$\rho^2=(\xi\pm\alpha)^2+(\varphi\pm\beta)^2,$$

где знаки должны быть выбраны так, чтобы в точке, окрестность которой рассматривается, ρ обращалась в нуль.

Поступило
4 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Даревский, ДАН, 75, № 1 (1950).