Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

К ПРОБЛЕМЕ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 IX 1950)

1. Пусть C_n есть пространство тригонометрических полиномов порядка n

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

с нормой $\| t_n \| = \max_x | t_n(x) |$. Зададим последовательность множителей $\Lambda = \{\lambda_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и построим тригонометрические полиномы

$$\tau_n(x) = \tau_n(x, t_n) = \lambda_0 \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\tilde{\tau}_n(x) = \tilde{\tau}_n(x, t_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (b_k \cos kx - a_k \sin kx),$$

где a_k и b_k — коэффициенты полинома (1). Положим

$$M_n = M_n(\Lambda) = \sup_{\|t_n\| \leqslant 1} \| \tau_n(t_n) \|, \quad \widetilde{M}_n = \widetilde{M}_n(\Lambda) = \sup_{\|t_n\| \leqslant 1} \| \tilde{\tau}_n(t_n) \|.$$

По самому определению, числа M_n и $\widetilde{M}_n$ являются наименьшими константами, при которых справедливы неравенства

$$\| \tau_n(t_n) \| \leqslant M_n \| t_n \|, \quad \| \tilde{\tau}_n(t_n) \| \leqslant \widetilde{M}_n \| t_n \| \tag{2}$$

для любого полинома $t_n \in C_n$.

Задачу определения или оценки констант M_n и $\widetilde{M}_n$ мы будем называть проблемой множителей для тригонометрических полиномов. Исходным пунктом всей теории явился рассмотренный С. Н. Бернштейном ([1]) случай $\lambda_k = k$. Если $\lambda_0 = 0$, $\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1} \geqslant 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и $\Delta^2\lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k-1} + \lambda_{k-2} \geqslant 0$ $(k = 2, \ldots, n)$, то, согласно результатам Г. Сеге ([2]) и Л. Фейера ([3]) (см. также ([4])), $M_n = \widetilde{M}_n = \lambda_n$. Обратимся теперь к рассмотрению случая, когда

$$\lambda_0 = 0, \quad \Delta\lambda_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \Delta^2\lambda_k \leqslant 0 \quad (k = 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Г. Т. Соколов ([4]) получил при этих условиях для M_n оценку

$$M_n \leqslant \frac{1}{n} \left(\lambda_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \right),$$

откуда, в связи с очевидным неравенством $M_n \geqslant \lambda_n$, вытекает, что $M_n \sim \lambda_n$*. Что же касается оценок $\widetilde{M}_n$ для случая (3), то здесь, на-

* Здесь и в дальнейшем знак $\sim$ употребляется как знак порядкового равенства. Запись $A_n \sim B_n$ означает, что существуют две абсолютные постоянные $0 < c_1 < c_2$ такие, что для всех n $c_1 B_n \leqslant A_n \leqslant c_2 B_n$.

сколько нам известно, не было получено общих результатов. Г. Т. Соколов [4] рассмотрел только частный случай $\lambda_k = k^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ и довольно сложным путем показал, что

$$c_\alpha n^\alpha \leqslant \widetilde{M}_n(k^\alpha) \leqslant c'_\alpha n^\alpha, \tag{4}$$

где c_α и c'_α зависят только от α.

В настоящей работе я доказываю, что при выполнении условий (3)

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \sim P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k}.$$

2. Нам понадобятся две леммы. Зададим произвольно последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n,\ \lambda_0 = 0)$ и положим

$$K_n(t) = \frac{\lambda_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \cos kt, \quad I_n = I_n(\Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(t)|\, dt.$$

Лемма 1. *Для любой последовательности* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n,\ \lambda_0 = 0)$

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \leqslant \frac{\pi}{2} I_n(\Lambda). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $t_n \in C_n$ и

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Так как $K_n(u)\, t_n(x+u)$ есть тригонометрический полином относительно u порядка не выше $2n-1$, то

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(nu) K_n(u)\, t_n(x+u)\, du = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nu K_n(u)\, t_n(x+u)\, du.$$

Но, как хорошо известно (см. [2] или [4]), последний интеграл равен $\widetilde{\tau}_n(x, t_n)$. Таким образом,

$$\widetilde{\tau}_n(x, t_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(nu) K_n(u)\, t_n(x+u)\, du.$$

Отсюда $\|\widetilde{\tau}_n(t_n)\| \leqslant 2I_n \|\varphi\| \|t_n\| = \frac{\pi}{2} I_n \|t_n\|$. В силу произвольности полинома t_n из этого неравенства вытекает (5), и лемма доказана.

Дадим теперь оценку I_n сверху.

Лемма 2. *Если последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условиям* (3), *то*

$$I_n(\Lambda) \leqslant \frac{4}{\pi^2} P_n + c_3\lambda_n. \tag{6}$$

Эта лемма является уточнением одного результата Хилла и Тамаркина [5] (см. также [6], § 8.85 и [7]).

Доказательство. Положим

$$V_n^{(m)}(t) = \frac{1}{m}\sum_{k=n-m+1}^{n} D_k(t)\ ^{*} \quad (m = 1, 2, \ldots, n+1),$$

* Идея использования в аналогичных задачах ядер Валле-Пуссена $V_n^{(m)}(t)$ принадлежит И. В. Матвееву [8].

где $D_k(t)$ — ядро Дирихле. Дважды применяя преобразование Абеля, получим

$$K_n(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} k\Delta^2\lambda_{k+1} V_{n-1}^{(k)}(t) + n\Delta\lambda_n V_{n-1}^{(n)}(t).$$

Отсюда

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k\,|\,\Delta^2\lambda_{k+1}\,|\,N_{n-1}^{(k)} + n\Delta\lambda_n N_{n-1}^{(n)}, \tag{7}$$

где

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\,V_{n-1}^{(k)}(t)\,|\,dt.$$

Константы $N_{n-1}^{(k)}$ являются нормами сумм Валле-Пуссена (([9], [10]), стр. 33—35 ([11], [12])) и для них справедлива следующая оценка С. М. Никольского ([12]):

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n}{k} + O(1),$$

где член $O(1)$ равномерно ограничен для всех n и k. Подставляя эту оценку в неравенство (7), получаем

$$I_n \leqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln\frac{n}{k}\,|\,\Delta^2\lambda_{k+1}\,| + O\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\,|\,\Delta^2\lambda_{k+1}\,|\right) + O\,(n\Delta\lambda_n).$$

Заметим теперь, что в силу условий (3)

$$n\Delta\lambda_n \leqslant \lambda_n, \quad \sum_{k=1}^{p} k\,|\,\Delta^2\lambda_{k+1}\,| \leqslant \lambda_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Вновь применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\ln\frac{n}{k}\,|\,\Delta^2\lambda_{k+1}\,| = \sum_{p=1}^{n-1}\ln\frac{p+1}{p}\sum_{k-1}^{p} k\,|\,\Delta^2\lambda_{k+1}\,| \leqslant P_n.$$

Поэтому $I_n \leqslant \frac{4}{\pi^2}P_n + O(\lambda_n)$, и лемма 2 доказана.

3. Переходим к формулировке и доказательству основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условиям* (3). *Тогда*

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \sim I_n(\Lambda) \sim P_n. \tag{8}$$

Второе из этих соотношений известно ([5], теорема 5).

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \leqslant \frac{\pi}{2} I_n(\Lambda) \leqslant \frac{2}{\pi}P_n + c_4\lambda_n.$$

Но, в силу условий (3), $\lambda_k \geqslant \frac{k}{n}\lambda_n$, откуда $P_n \geqslant \lambda_n$. Поэтому

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \leqslant \frac{\pi}{2} I_n(\Lambda) \leqslant c_5 P_n. \tag{9}$$

Остается оценить $\widetilde{M}_n$ снизу. Для этого положим

$$t_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx.$$

Как хорошо известно, $\| t_n^* \| \leqslant c_6$. С другой стороны,

$$\| \widetilde{\tau}_n (t_n^*) \| \geqslant \widetilde{\tau}_n (0,\ t_n^*) = P_n.$$

Отсюда и из (2)

$$\widetilde{M}_n (\Lambda) \geqslant \frac{\| \widetilde{\tau}_n (t_n^*) \|}{\| t_n^* \|} \geqslant \frac{1}{c_6} P_n. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует (8), и теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ $(k = 0,\ 1, \ldots)$ *удовлетворяет для любого* n *условиям* (3). *Тогда*

$$\widetilde{M}_n (\Lambda) = \frac{2}{\pi} P_n + O(\lambda_n), \quad I_n (\Lambda) = \frac{4}{\pi^2} P_n + O(\lambda_n). \tag{11}$$

В частности, если, кроме того, $\lambda_n = o(P_n)$, *то*

$$\widetilde{M}_n (\Lambda) \approx \frac{2}{\pi} P_n, \quad I_n (\Lambda) \approx \frac{4}{\pi^2} P_n. \tag{12}$$

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\widetilde{M}_n (\Lambda) \leqslant \frac{\pi}{2} I_n \leqslant \frac{2}{\pi} P_n + O(\lambda_n). \tag{13}$$

С другой стороны, положим

$$\sigma_n (x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{k} \sin kx.$$

Полином $\sigma_n (x)$ является суммой Фейера порядка n для функции $\varphi_1 (x) = (\pi - x)/\pi$ $(0 < x \leqslant 2\pi)$. Так как $\| \varphi_1 \| = 1$, то $\| \sigma_n \| \leqslant 1$. Далее,

$$\| \widetilde{\tau}_n (\sigma_n) \| \geqslant \widetilde{\tau}_n (0, \sigma_n) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{\lambda_k}{k} \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k} - \frac{2}{\pi} \lambda_n.$$

Отсюда и из (2)

$$\widetilde{M}_n (\Lambda) \geqslant \frac{\| \widetilde{\tau}_n (\sigma_n) \|}{\| \sigma_n \|} \geqslant \frac{2}{\pi} P_n + O(\lambda_n). \tag{14}$$

Неравенства (13) и (14) дают соотношения (11). Если же, кроме того, выполняется условие $\lambda_n = o(P_n)$, то из (11) следует (12), и теорема 2 доказана.

Применяя полученные результаты к случаю Г. Т. Соколова $\lambda_k = k^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, сразу же выводим неравенства (4), где $c'_\alpha = \frac{2}{\pi\alpha} + c_7$, $c_\alpha = \frac{2}{\pi\alpha} - c_8$ (для малых α) и $c_\alpha \geqslant c_9$ (для α, близких к 1).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
10 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Зап. Харьк. мат. об-ва, 13, 49 (1912). [2] G. Szegö, Schriften d. Königsberger Gelehrten Ges., Naturwiss. Kl., H. 4, 59 (1928). [3] L. Fejer, Acta Lit. Ac. Sci., 2, 75 (1925). [4] Г. Т. Соколов, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 6—7, 857 (1935). [5] E. Hill and J. D. Tamarkin, Trans. Am. Math. Soc., 34, 757 (1932). [6] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939. [7] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 259 (1948). [8] И. В. Матвеев, О методах суммирования двойных рядов Фурье, Диссертация, МГУ, 1950. [9] C. de la Vallée Poussin, C. R., 166, 799 (1918). [10] C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions, Paris, 1919. [11] Л. Вербицкий, Научн. зап. Днепропетр. гос. ун-та, 21, 113 (1940). [12] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 509 (1940).