Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. М. ГРОБМАН

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЯХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 IX 1950)

Заметка посвящена изучению вопроса о взаимном расположении характеристических показателей* систем

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ik} x_k + f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (\alpha)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum a_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (\beta)$$

в зависимости от свойств функций f_i.

Прежде чем приступить к изложению результатов, сделаем несколько замечаний.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ — попарно различные действительные числа и в какой-либо нормальной [1] системе решений данной линейной системы уравнений присутствует l_1 решений с характеристическими показателями ω_1; l_2 решений с характеристическими показателями $\omega_2, \ldots, l_s$ решений с характеристическими показателями ω_s и $l_1 + \ldots + l_s = n$. В таком случае числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ мы будем называть характеристическими показателями данной системы уравнений, а $l_1, l_2, \ldots, l_s$ — их кратностями.

Легко видеть, что кратность не зависит от выбора нормальной системы.

Для систем уравнений с постоянными коэффициентами характеристическими показателями служат действительные части корней характеристического уравнения. Число корней, у которых действительные части равны ω_k, есть кратность показателя ω_k.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Системы (α) и (β) перепишутся в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \qquad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = AY. \qquad (2)$$

* Характеристический показатель γ решения $(x_1, \ldots, x_n)$ вычисляется по формуле $\gamma = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t} \lg \sum_k |x_k|$ и равен характеристичному числу Ляпунова, взятому с обратным знаком.

Решением уравнения (2) является матрица

$$Y(t)=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn}\end{pmatrix},$$

столбцы которой представляют решения системы (β).

Относительно правых частей уравнений (1) и (2) сделаем следующие предположения:

1° A — постоянная матрица.

2° $f(t, x)$ — вектор, определенный и непрерывный для $t \geqslant t_0$ и любого x.

3° $f(t, 0)=0$.

4° $|f(t, x')-f(t, x'')| \leqslant g(t)|x'-x''|$.

Здесь $g(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, а $|x|$ обозначает норму x и $|x|=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$. Нормой матрицы $K(t)=(k_{ij}(t))$ называют неотрицательную функцию $|K(t)|=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|k_{ij}(t)|$.

5° $\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_s$ — действительные части корней уравнения $\|A-\lambda E\|=0$ и $l_1, l_2, \ldots, l_s$ — их кратности ($s \leqslant n$, $l_1+l_2+\ldots+l_s=n$, E — единичная матрица).

Будем называть некоторую матрицу нормальной матрицей уравнения (2), если ее столбцы составляют фундаментальную систему решений системы (β) и при этом каждый из первых l_1 столбцов имеет показатель ω_1, каждый из следующих l_2 столбцов — показатель ω_2 и т. д.

Из теоремы Ляпунова о сумме характеристических показателей нормальной системы решений вытекает, что нормальная матрица состоит из решений нормальной системы.

Обозначим: $l_1+l_2+\cdots l_k=n_k$, $n_0=0$, $n_s=n$,

$$Y_k=\begin{pmatrix} y_{11}\cdots y_{1k}\,0\ldots 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_{n1}\ldots y_{nk}\,0\ldots 0\end{pmatrix},\quad Y_{n-k}=\begin{pmatrix} 0\ldots 0\, y_{1\,k+1}\cdots y_{1n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0\ldots 0\, y_{n\,k+1}\cdots y_{nn}\end{pmatrix},\quad C_k=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, $Y_k+Y_{n-k}=Y_n=Y$, $Y_{n-n}=Y_0=0$, $C_n=C$.

Пусть $Y(t)$ — нормальная матрица уравнения (2), обладающая тем свойством, что при умножении слева на некоторую невырожденную постоянную матрицу она обращается в треугольную. Существование такой матрицы нетрудно доказать. Действительно, для любой матрицы A, очевидно, существует матрица D такая, что $D^{-1}AD=\Delta$ есть треугольная матрица, диагональные элементы которой подчинены условию $\operatorname{Re}(\sigma_{i,i}) \leqslant \operatorname{Re}(\sigma_{i+1,i+1})$.

Легко видеть, что у уравнения $dV/dt=\Delta V$ существует треугольная нормальная матрица $V(t)$. Но тогда матрица $DV(t)$ является нормальной для уравнения (2).

Итак, пусть $Y(t)$ — такая специальная нормальная матрица уравнения (2) и $Y(0)=B$. Пусть $0<\varepsilon<{}^1/_4\min(\omega_{j+1}-\omega_j)$ $j=1, 2, \ldots, s-1$, и число b определено из условий

$$\begin{aligned} &|Y_{n_k}(t)| \leqslant b e^{(\omega_k+\varepsilon)t} && \text{для } t \geqslant 0 \text{ и } k=1, 2, \ldots, s; \\ &|Y_{n-n_k}(t)| \leqslant b e^{(\omega_{k+1}-\varepsilon)t} && \text{для } t \leqslant 0 \text{ и } k=0, 1, \ldots, s-1. \end{aligned} \qquad (3)$$

Теорема 1. *Если для* $t \geqslant t_0$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\varepsilon(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{\varepsilon(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{2b\,|B|} \tag{4}$$

и для любого положительного числа α

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} g(\tau)\, d\tau < +\infty, \tag{5}$$

то у уравнения (1) *для всякого* $k = 1, 2, \ldots, s$ *существует* n_k*-мерное множество решений, характеристические показатели которых лежат на сегменте* $[\omega_k - 2\varepsilon,\ \omega_k + 2\varepsilon]$. *Любое решение уравнения* (1) *принадлежит одному из этих множеств* (множество решений называется k-мерным, если множество начальных значений k-мерно).

Легко убедиться, что условия (4) и (5) реализуются, если, например: 1) $g(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{4b\,|B|}$ для $t \geqslant t_0$ или 2) $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, где $g_1(t) \leqslant c < \frac{\varepsilon}{4b\,|B|}$ для $t \geqslant t_0$, а $\int_{t_0}^{\infty} g_2(\tau)\, d\tau < +\infty$.

Случай (1) обобщает и уточняет теорему Персидского [2] об устойчивости характеристических показателей линейных систем с постоянными коэффициентами.

Из теоремы 1 очень просто выводятся достаточные условия того, чтобы характеристические показатели уравнения (1) совпадали с показателями уравнения (2). Точнее, имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Пусть дана последовательность положительных чисел* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$, *стремящаяся к нулю, и пусть для любого* $p = 1, 2, 3, \ldots$ *существует такое* T_p, *что для* $t \geqslant T_p$

$$\int_{T_p}^{t} e^{-\varepsilon_p(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{\varepsilon_p(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{2b_p\,|B|},$$

где константа b_p *определена из условий* (3) *для* ε_p.

В этих предположениях характеристический показатель любого решения уравнения (1) *равен одному из чисел* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. *Множество решений уравнения* (1), *характеристические показатели которых равны* ω_k, *имеет размерность* n_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$.

Требования этой теоремы выполняются, если $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, где $g_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а $\int_{t_0}^{\infty} g_2(t)\, dt < +\infty$.

Случай, когда $g(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (т. е. $g_2(t) \equiv 0$), является непосредственным обобщением теоремы Перрона [3] о том, что если коэффициенты $a_{ik}(t)$ некоторой линейной системы стремятся при $t \to \infty$ к конечным пределам a_{ik}, то характеристические показатели этой системы суть вещественные части корней уравнения $\| a_{ik} - \delta_{ik}\lambda \| = 0$.

Теорема 1 позволяет вывести некоторые заключения о решениях и в том случае, когда $f(t, x)$ определена или удовлетворяет условию Липшица не во всем пространстве x, а лишь в некоторой ограниченной области G, содержащей начало координат.

Теорема 3. *Пусть* $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_m < 0 \leqslant \omega_{m+1} < \ldots < \omega_s$ $(m \leqslant s)$, $d = \min(\omega_{j+1} - \omega_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s-1$, $0 < \varepsilon < \min\left(\frac{d}{4}, -\frac{\omega_m}{2}\right)$.

Если выполнены условия (4) *и* (5), *то у уравнения* (1):

1) *Для любого* $k=1, 2, \ldots, m$ *существует* n_k*-мерное множество решений, характеристические показатели которых расположены на сегменте* $[\omega_k - 2\varepsilon, \omega_k + 2\varepsilon]$.

2) *Характеристический показатель всякого решения уравнения* (1), *определенного при* $t \to \infty$, *лежит на одном из отрезков* $[\omega_k - 2\varepsilon, \omega_k + 2\varepsilon]$, $k=1, 2, \ldots, m$ *и* $[\omega_{m+1} - 2\varepsilon, 0]$, *если* $\omega_{m+1} - 2\varepsilon \leqslant 0$.

3) *Кроме того, если* $\omega_s - 2\varepsilon > 0$, *то у уравнения* (1) *существует* n*-мерное множество решений, покидающих область* G *при конечных значениях* t.

4) *Если* $\omega_{m+1} > 0$ *и* $\varepsilon < \min\left(\frac{d}{4}, -\frac{\omega_m}{2}, \frac{\omega_{m+1}}{2}\right)$, *то характеристический показатель любого решения уравнения* (1), *определенного при* $t \to \infty$, *принадлежит одному из* m *отрезков* $[\omega_k - 2\varepsilon, \omega_k + 2\varepsilon]$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Здесь, разумеется, имеют место следствия, аналогичные следствиям из теоремы 1.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $f(t, x)$ *обладает свойствами*:

1) $f(t, x)$ *определена и непрерывна для* $t \geqslant t_0$ *и* $x \in G$;

2) $f(t, 0) = 0$;

3) *Для любого* $\eta > 0$ *существуют* T *и* δ *такие, что из условия* $t \geqslant T$ *и* $|x'| < \delta$, $|x''| < \delta$ *вытекает, что*

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant \eta |x' - x''|.$$

Если $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m < 0 \leqslant \omega_{m+1}$, *то*:

1. *Для* $k=1, 2, \ldots, m$ *у уравнения* (1) *существует* n_k*-мерное множество решений, характеристические показатели которых равны* ω_k.

2. *Всякое решение уравнения* (1), *не уходящее из области* G *при конечном* t, *либо принадлежит одному из этих множеств, либо его характеристический показатель равен нулю.*

3. *Если* $\omega_s > 0$, *то существует* n*-мерное множество решений уравнения* (1), *покидающих достаточно малую окрестность начала координат при конечных* t.

4. *Если среди чисел* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ *нет равных нулю, то существует столь малая окрестность начала координат, что всякое решение, остающееся в ней бесконечно долго, имеет отрицательный характеристический показатель.*

Первые два утверждения составляют теорему Перрона, третье обобщает теорему Ляпунова о неустойчивости по первому приближению, четвертое — теорему Петровского ([4]).

Поступило
12 IX 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения. [2] К. Персидский, Изв. АН Каз. ССР, в. 1 (1947). [3] O. Perron, Math. Zs., 29 (1928). [4] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2-е, 1949.