

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Д. ТАРТАКОВСКИЙ

**ЗВУКОВЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ СЛОИ**

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 9 IX 1950)

1. В связи с развитием ультразвуковой техники в акустике становится актуальной проблема создания полной прозрачности границ между различными средами. Строгое решение задачи о распространении плоских волн через однородные слои<sup>(1)</sup> позволяет исследовать условия полного перехода звуковой энергии через границу двух различных сред, между которыми расположены звуковые переходные слои. Согласно<sup>(1)</sup>, коэффициент отражения  $R$  от совокупности  $n$  однородных плоских слоев с произвольно заданными волновыми сопротивлениями  $Z_i = \rho_i c_i$  ( $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость распространения продольных волн) и толщинами  $l_i$ , ограниченных полубесконечными средами  $i = 0, i = n + 1$  при перпендикулярном падении \*

$$R = \frac{\left[ \frac{Z_{n+1}}{Z_0} \bar{S}_1(\alpha, \beta) - \bar{S}_1(\beta, \alpha) \right] + i \left[ \frac{1}{Z_0} \bar{S}_2(\alpha, \beta) - Z_{n+1} \bar{S}_2(\beta, \alpha) \right]}{\left[ \frac{Z_{n+1}}{Z_0} \bar{S}_1(\alpha, \beta) + \bar{S}_1(\beta, \alpha) \right] + i \left[ \frac{1}{Z_0} \bar{S}_2(\alpha, \beta) + Z_{n+1} \bar{S}_2(\beta, \alpha) \right]}, \quad (1)$$

где

$$\bar{S}_1(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \cos \varphi_i \left[ 1 - \sum_{q=2}^n \beta_q \sum_{p=1}^{q-1} \alpha_p + \sum_{s=4}^n \beta_s \sum_{r=3}^{s-1} \alpha_r \sum_{q=2}^{r-1} \beta_q \sum_{p=1}^{q-1} \alpha_p - \dots \right], \quad (2)$$

$$\bar{S}_2(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \cos \varphi_i \left[ \sum_{p=1}^n \alpha_p - \sum_{r=3}^n \alpha_r \sum_{q=2}^{r-1} \beta_q \sum_{p=1}^{q-1} \alpha_p + \dots \right], \quad (3)$$

в которых  $p, q, r, s, \dots$  обозначают индексы, по которым производится суммирование, например,  $\sum_{q=2}^n \alpha_q \sum_{p=1}^{q-1} \beta_p = \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2$ , и приняты сокращения  $\alpha_i = Z_i \operatorname{tg} \varphi_i$ ,  $\beta_i = \frac{1}{Z_i} \operatorname{tg} \varphi_i$ ,  $\varphi_i = \frac{2\pi f}{c_i} l_i$ .

Если ограничиться рассмотрением переходных слоев, не имеющих диссипативных потерь, то условие полного перехода звуковой энергии из среды  $i = 0$  в среду  $i = n + 1$  ( $R = 0$ ) запишется как

$$\frac{Z_{n+1}}{Z_0} \bar{S}_1(\alpha, \beta) - \bar{S}_1(\beta, \alpha) = 0, \quad \frac{1}{Z_0} \bar{S}_2(\alpha, \beta) - Z_{n+1} \bar{S}_2(\beta, \alpha) = 0. \quad (4)$$

\* При косом падении формула (1) остается в силе и следует лишь заменить  $c_i$  на  $c_i / \cos \theta_i$ , где  $\theta_i$  — угол между лучом и перпендикуляром к поверхности слоя.

Для учета диссипативных потерь необходимо разделить действительные и мнимые члены числителя (1), что принципиально не вызывает никаких трудностей, и затем порознь приравнять их нулю, аналогично (4). Из формул (4) следует, что принципиально можно получить полную прозрачность границы любых сред сочетанием слоев из любых материалов.

2. Рассмотрим частные случаи. Пусть между средами 0, 2 помещен однородный слой  $i = 1$ . Тогда, согласно (2),

$$\overset{\text{---}}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta) = \overset{\text{---}}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha) = \cos \varphi_1, \quad \frac{1}{Z_1} \overset{\text{---}}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) = Z_1 \overset{\text{---}}{\mathbf{S}}_2(\beta, \alpha) = \sin \varphi_1$$

и (4) перейдут в

$$\left( \frac{Z_2}{Z_0} - 1 \right) \cos \varphi_1 = 0, \quad \left( \frac{Z_1}{Z_0} - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \sin \varphi_1 = 0, \quad (4a)$$

из которых следует единственно возможное решение

$$\cos \varphi_1 = 0, \quad Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_2}. \quad (5)$$

Таким образом, при использовании одинарного переходного слоя его волновое сопротивление должно быть однозначно связано с волновыми сопротивлениями сред, а толщина должна быть равна  $(2\beta - 1) \frac{\lambda_1}{4}$  ( $p$  — целое число,  $\lambda_1$  — длина волны, распространяющейся в слое). Условия (5) были ранее сформулированы Розенбергом (2) на основании формулы Релея (3) для коэффициента отражения звуковой энергии от пластины, расположенной

между различными средами, в связи с критикой ошибочных выводов Эрнста (4) о просветляющем действии полуволновой пластины.

В случае двойного переходного слоя

$$\overset{\text{---}}{\mathbf{S}}_1^2(\alpha, \beta) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{Z_1}{Z_2} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

$$\overset{\text{---}}{\mathbf{S}}_2^2(\alpha, \beta) = Z_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + Z_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

и решение (4) дает формулы

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \pm \sqrt{- \frac{(Z_3 - Z_0) \left( Z_{2,1} - \frac{Z_0 Z_3}{Z_{2,1}} \right)}{\left( Z_3 \frac{Z_1}{Z_2} - Z_0 \frac{Z_2}{Z_1} \right) \left( Z_{1,2} - \frac{Z_0 Z_3}{Z_{1,2}} \right)}}, \quad (6)$$

представляющие широкий выбор  $Z_1$  и  $Z_2$  для достижения полного перехода звуковых волн из среды 0, 3 в среду 3, 0.

Но вещественные значения  $\operatorname{tg} \varphi_1$  и  $\operatorname{tg} \varphi_2$  возможны лишь при условии, что либо один из сомножителей подкоренных выражений, либо три из них отрицательны. Это дает 4 сочетания неравенств, определяющих области значений  $Z_1$  и  $Z_2$  (в зависимости от  $Z_0$  и  $Z_3$ ), при которых возможно получить полную прозрачность, причем границы

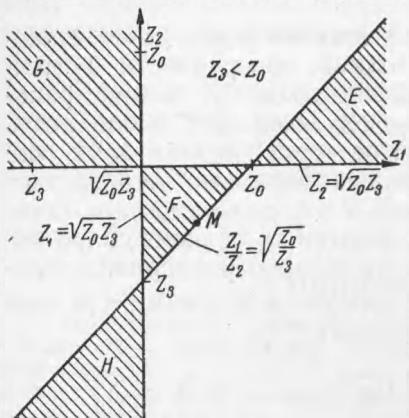


Рис. 1

этих областей определяются, согласно (6), уравнениями

$$Z_{1,2} = \sqrt{Z_0 Z_3}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{Z_0}{Z_3}}. \quad (7)$$

На рис. 1 по осям координат в логарифмическом масштабе отложены  $Z_1$  и  $Z_2$ . За общий нуль принята величина  $\sqrt{Z_0 Z_3}$ .  $Z_0, Z_3$  представлены двумя отрезками, равными по величине и противоположными по знаку ( $Z_3 < Z_0$ ). Области  $E, F, G, H$  содержат значения  $Z_{1,2}$ , для которых можно получить полную прозрачность, беря  $\varphi_{1,2}$  согласно (6). Наложив численный масштаб для  $Z_0 Z_3$ , можно непосредственно из графика определить применимость тех или иных материалов для промежуточных слоев.

3. Полная прозрачность обеспечивается выполнением условия (6) для одной частоты  $f_0$ . При применении одного промежуточного слоя прозрачность в прилегающей области частот зависит от отношения  $f/f_0$  и  $Z_2/Z_0$ . При двух промежуточных слоях частотная характеристика прозрачности определяется также величинами  $Z_1$  и  $Z_2$ . Можно показать, что наиболее широкая полоса прозрачности будет при условии

$$Z_{1,2} = Z_0^{1/4} Z_3^{1/4}, \quad (8)$$

которому на рис. 1 соответствует точка  $M$ . Если же  $Z_{1,2} \ll Z_0, Z_3$ , то частотная характеристика будет иметь вид острого резонанса.

На рис. 2 показана прозрачность по энергии, рассчитанная для случая  $Z_3 = 100 Z_0$ . Кривая  $a$  соответствует одному промежуточному слою, кривые  $b$  и  $v$  — двум слоям, причем  $b$  рассчитана для оптимальных значений  $Z_1, Z_2$  (8), а  $v$  — для значений  $Z_{1,2} > Z_0, Z_3$ .

Если полная прозрачность рассчитана для перпендикулярного падения  $\theta_i = 0$ , то с ростом угла падения  $\theta_0$  прозрачность уменьшается симметрично по обе стороны от максимума. Если же полная прозрачность рассчитана для некоторого угла  $\theta_0^*$ , то с отклонением угла падения  $\theta_0$  от этого значения прозрачность уменьшается меньше в сторону малых  $\theta_0$ , доходит до некоторого минимума при  $\theta_0 = 0$  и снова растет в пределах  $\theta_0 \leq |\theta_0^*|$ . Это обуславливает возможность получения прозрачности, мало зависящей в заданных пределах  $\pm \theta_0^*$  от угла падения  $\theta_0$ . Вообще же, поскольку  $Z_i, \varphi_i$  зависят от  $\cos \theta_i$ , следует ожидать, что выбор для переходных слоев материалов, характеризуемых малыми  $c_i$ , обеспечит независимость прозрачности от угла в сравнительно широких пределах.

Приведенные соображения подтверждаются ходом рассчитанных кривых зависимости прозрачности от угла падения  $\theta_i$  для случая одного промежуточного слоя (рис. 3) при величине  $c_1 = \sqrt{c_0 c_2} = 0,31 c_0$  (кривая  $a$ ) и  $c_1 = 0,2 c_0$  (кривая  $b$ ). Для сравнения здесь же показано изменение прозрачности при непосредственном переходе волн в среду 2 (кривая  $v$ ), и эта же кривая в увеличенном масштабе, соответствующая  $D = 1$  при  $\theta_0 = 0$  (кривая  $z$ ). Важно, что прозрачность при наличии промежуточного слоя спадает медленнее, чем при непосредственном переходе через одну границу, и притом тем медленнее, чем меньше скорость  $c_1$ .

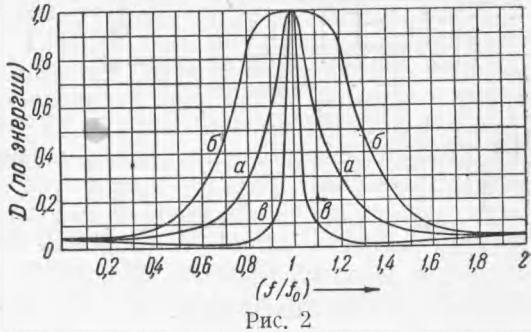


Рис. 2

4. Рассмотрим случай произвольного числа слоев  $i = 1, 2, \dots, n$ . Из (2), (3) следует, что можно получить значительное упрощение (4), взяв толщины слоев равными  $p \frac{\lambda_i}{2}$  либо  $(2p - 1) \frac{\lambda_1}{4}$ .

В первом случае  $\sin \varphi_i = 0$ ,  $\cos \varphi_i = 1$ ,  $S_1(\alpha, \beta) = S_1(\beta, \alpha) = 1$ ;  $S_2(\alpha, \beta) = S_2(\beta, \alpha) = 0$  и уравнения (4) не могут быть удовлетворены при  $Z_0 \neq Z_{n+1}$  \*.

В случае четвертиволновых слоев  $\cos \varphi_i = 0$ ,  $\sin \varphi_i = 1$  и

$$S_1(\alpha, \beta) = \frac{Z_1 Z_3 \dots}{Z_2 Z_4 \dots}, \quad S_1(\beta, \alpha) = \frac{Z_2 Z_4 \dots}{Z_1 Z_3 \dots}, \quad S_2(\alpha, \beta) = S_2(\beta, \alpha) = 0,$$

в соответствии с чем решение (4) запишется в форме

$$\frac{Z_2 Z_4 \dots}{Z_1 Z_3 \dots} = \sqrt{\frac{Z_{n+1}}{Z_0}}, \quad (9a)$$

если число слоев четное, и

$$\frac{Z_2 Z_4 \dots}{Z_1 Z_3 Z_5 \dots} = \sqrt{Z_{n+1} Z_0}, \quad (96)$$

если оно нечетное.

Отметим еще два простых случая формул (2) — (4).

При  $\varphi_i = \pi/4$

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_i, \quad \beta_i = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_i.$$

При  $\varphi_i \rightarrow 0$ , пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$S_1(\alpha, \beta) = 1 - (2\pi f)^2 \sum_{q=2}^n \kappa_q l_q \sum_{p=1}^{q-1} \rho_p l_p, \quad S_2(\alpha, \beta) = 2\pi f \sum_{p=1}^n \rho_p l_p,$$

где  $\kappa = \rho c^2$  (сжимаемость).

Нетрудно видеть, что изложенное выше может быть распространено на оптические просветляющие пластины, для чего достаточно, например, для перпендикулярного падения световых волн положить  $\rho_i = 1$ .

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило  
5 VIII 1950

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Б. Д. Тартаковский, ДАН, **71**, 465 (1950). <sup>2</sup> Л. Д. Розенберг, Звуко-вые фокусирующие системы, Изд. АН СССР, М. — Л., 1949. <sup>3</sup> Рэлей, Теория звука, 2, § 271, 1944. <sup>4</sup> F. Ernst, Journ. Sci. Inst., **22**, 238 (1945).

\* Этим доказывается полная ошибочность выводов Эриста (<sup>2</sup>) о просветляющем действии нескольких полуволновых слоев, независимо от закона распределения их волновых сопротивлений.