Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. М. ДАРЕВСКИЙ

К ВОПРОСУ О ДЕЙСТВИИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 4 IX 1950)

Настоящая работа имеет целью указать простые асимптотические равенства, позволяющие определить в окрестности точки приложения сосредоточенной нагрузки, действующей на тонкую цилиндрическую оболочку, те перемещения и внутренние силовые факторы, которые не ограничены в этой окрестности. До сих пор не было удачных попыток получить указанного рода равенства.

Пусть $x = R\xi$ и $y = R\varphi$ — координаты на средней поверхности S круговой цилиндрической оболочки с радиусом R, соответственно по образующей и по направляющему кругу.

Будем отправляться от нагрузки, распределенной по элементу $s \in S$ для которого $|x| \leqslant a/2$, $|y| \leqslant b/2$, с некоторыми постоянными составляющими Q_ν/ab и равной нулю вне элемента s (говоря о составляющих нагрузки, мы имеем в виду компоненты Q_1/ab, Q_2/ab, Q_3/ab и Q_4/ab, Q_5/ab, 0 по осям X, Y, Z прямоугольной подвижной системы координат на поверхности S, соответственно, главного вектора системы внешних сил и главного момента, отнесенных к единице площади S.)

Мы принимаем обозначения и вариант Лява, при котором используются все шесть уравнений равновесия и формула

$$S_1 - S_2 = \frac{2Eh}{1+\sigma}\omega,$$

устанавливающая связь между тангенциальными усилиями S_1 и S_2 и величиной ω, характеризующей сдвиг поверхности S (E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона, $2h$ — толщина оболочки).

Все внутренние силовые факторы, кроме перерезывающих усилий N_1 и N_2, определяются через перемещения u, v, w по известным формулам, а величины u, v, w; N_1, N_2 определяются из системы уравнений

$$L_{\nu1}u + L_{\nu2}v + L_{\nu3}w + L_{\nu4}N_1 + L_{\nu5}N_2 = P_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{1}$$

где $L_{\nu\mu}$ — некоторые линейные дифференциальные операторы по переменным ξ и φ, а P_ν — величины, пропорциональные компонентам, нагрузки.

Имея в виду установить вышеуказанные асимптотические формулы, можно не рассматривать граничных условий и, считая нагрузку состоящей из одного компонента с фиксированным индексом ν, исходить из частного решения системы (1):

$$u = u^{(\nu)} = (-1)^{\nu+1}D_{\nu1}\Phi_\nu,\ \ v = v^{(\nu)} = (-1)^{\nu+2}D_{\nu2}\Phi_\nu,\ \ w = w^{(\nu)} = (-1)^{\nu+3}D_{\nu3}\Phi_\nu$$
$$N_1 = N_1^{(\nu)} = (-1)^{\nu+4}D_{\nu4}\Phi_\nu, \quad N_2 = N_2^{(\nu)} = (-1)^{\nu+5}D_{\nu5}\Phi_\nu,$$

где $D_{\nu\mu}$ — минор детерминанта $D=(L_{\nu\mu})$, соответствующий элементу $L_{\nu\mu}$, а Φ_ν — какая-либо функция, удовлетворяющая уравнению

$$D\Phi_\nu = P_\nu.$$

Раскладывая P_ν в ряд Фурье по переменной φ, определяем Φ^ν в виде:

$$\Phi_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi,$$

где функции $f_{\nu n}(\xi)$ находятся из некоторого обыкновенного линейного дифференциального уравнения с помощью интеграла Фурье.

При таком частном решении системы (1) каждая из искомых величин (перемещений и внутренних силовых факторов), соответствующая компоненту нагрузки с индексом ν, определяется в виде:

$$L_\nu^{(t)}\Phi_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)}(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi),$$

где $L_\nu^{(t)}$ — некоторый линейный дифференциальный оператор по переменным ξ и φ не выше 8-го порядка (индекс t показывает, что каждой искомой величине соответствует свой оператор).

Устремляя величины a и b к нулю при постоянных Q_ν, переходим к сосредоточенной нагрузке с компонентами Q_ν.

С некоторыми оговорками можно доказать, что

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}} L_\nu^{(t)}\Phi_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)}(f_{\nu n}^{00}(\xi)\cos n\varphi), \tag{2}$$

где

$$f_{\nu n}^{00}(\xi) = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}} f_{\nu n}(\xi).$$

Определив функции $f_{\nu n}^{00}(\xi)$, мы представляем их в виде:

$$f_{\nu n}^{00}(\xi) = f_{\nu n1}^{00}(\xi) + f_{\nu n2}^{00}(\xi) \qquad (n>1),$$

где функции $f_{\nu n2}^{00}(\xi)$ выбраны специальным образом (они соответствуют, в известном смысле, четырехкратному оператору Лапласа, входящему в состав оператора D). После этого удается выделить неограниченную часть выражения (2) в замкнутой форме и получить следующие асимптотические формулы, которые объединены здесь в группы, в зависимости от вида входящих в них выражений.

Первая группа асимптотических формул:

$$Q_1^{-1}u^{(1)} \simeq Q_2^{-1}v^{(2)} \simeq -(1+\sigma)(3-\sigma)(8\pi Eh)^{-1}\ln\rho \qquad (\rho^2=\xi^2+\varphi^2);$$

$$2(1-2\sigma)^{-1}RT_2^{(3)} \simeq -\frac{2}{3}RT_2^{(3)} \simeq -(1+\sigma)^{-1}G_1^{(3)} \simeq -(1+\sigma)^{-1}G_2^{(3)} \simeq (4\pi)^{-1}Q_3\ln\rho;$$

$$-\frac{2}{3}Q_4^{-1}v^{(4)} \simeq Q_5^{-1}u^{(5)} \simeq (1+\sigma)(16\pi EhR)^{-1}\ln\rho.$$

Вторая группа асимптотических формул:

$$4\pi R T_1^{(1)} \simeq Q_1 \xi \rho^{-2} [2(1+\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 3 - \sigma],$$

$$4\pi R T_2^{(1)} \simeq - Q_1 \xi \rho^{-2} [2(1+\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 1 + \sigma],$$

$$96\pi R^2 G_1^{(1)} \simeq -(1+\sigma) h^2 Q_1 \xi \rho^{-2} [8(1+\sigma)\xi^2\varphi^2(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6} - 8\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} + 2(3+\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 3 - \sigma],$$

$$96\pi(1-\sigma)R^2 G_2^{(1)} \simeq -(1+\sigma)(1-2\sigma-\sigma^2) h^2 Q_1 \xi \rho^{-2} [8\xi^2\varphi^2(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6} - 4\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} + 3\varphi^2\rho^{-2} - 1];$$

$$S_1^{(2)} \simeq - S_2^{(2)} \simeq -(4\pi R)^{-1} Q_2 \xi \rho^{-2} [2(1+\sigma)\varphi^2\rho^{-2} + 1 - \sigma],$$

$$H_1^{(2)} = - H_2^{(2)} \simeq h^2 (96\pi R^2)^{-1} Q_2 \xi \rho^{-2} [8(1-\sigma^2)\xi^2\varphi^2(\varphi^2-\xi^2)\rho^{-6} + 4(3-\sigma)\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 2(21-2\sigma+\sigma^2)\varphi^2\rho^{-2} - 11 - 2\sigma + \sigma^2];$$

$$2\pi R N_1^{(3)} \simeq - Q_3 \xi \rho^{-2};$$

$$64\pi R^2 S_1^{(4)} \simeq - Q_4 \xi \rho^{-2} [8(1-\sigma)\xi^2\varphi^2(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6} - 4(1+\sigma)\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} + 6(3+\sigma)\varphi^2\rho^{-2} + 7 - 3\sigma],$$

$$64\pi R^2 S_2^{(4)} \simeq Q_4 \xi \rho^{-2} [8(1-\sigma)\xi^2\varphi^2(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6} - 4(1+\sigma)\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} + 2(17-5\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 1 + 5\sigma],$$

$$H_1^{(4)} = - H_2^{(4)} \simeq (1-\sigma)(8\pi R)^{-1} Q_4 \xi \rho^{-2} (2\varphi^2\rho^{-2} - 1);$$

$$8\pi R^2 T_1^{(5)} \simeq Q_5 \xi \rho^{-2} [2\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 2(1-2\sigma)\varphi^2\rho^{-2} + 1 - 2\sigma],$$

$$8\pi R^2 T_2^{(5)} \simeq - Q_5 \xi \rho^{-2} [2\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 6\varphi^2\rho^{-2} + 3],$$

$$32\pi(1-\sigma) R G_1^{(5)} \simeq Q_5 \xi \rho^{-2} [8(1-\sigma)\xi^2\varphi^2(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6}] + 4(1-\sigma)\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 6(1-\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 13 - 3\sigma],$$

$$4\pi(1-\sigma) R G_2^{(5)} \simeq Q_5 \xi \rho^{-2} [2(1-\sigma)\varphi^2\rho^{-2} - 1 - \sigma].$$

Третья группа асимптотических формул:

$$S_1^{(1)} \simeq - S_2^{(1)} \simeq -(4\pi R)^{-1} Q_1 \varphi \rho^{-2} [2(1+\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 1 - \sigma],$$

$$H_1^{(1)} = - H_2^{(1)} \simeq -(1+\sigma) h^2 (96\pi R^2)^{-1} Q_1 \varphi \rho^{-2} [8(1-\sigma)\xi^4(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6} - 4(2-\sigma)\xi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} + 2(11-\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 5 - \sigma];$$

$$4\pi R T_1^{(2)} \simeq - Q_2 \varphi \rho^{-2} [2(1+\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 1 + \sigma],$$

$$4\pi R T_2^{(2)} \simeq - Q_2 \varphi \rho^{-2} [2(1+\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 3 - \sigma],$$

$$96\pi R^2 G_1^{(2)} \simeq h^2 Q_2 \varphi \rho^{-2} [8(1-\sigma^2)\xi^4(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6} - 16\xi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} + 2(39+\sigma^2)\xi^2\rho^{-2} - 25 + \sigma^2],$$

$$96\pi R^2 G_2^{(2)} \simeq -(1-\sigma) h^2 Q_2 \varphi\rho^{-2} [8(1+\sigma)\xi^4 (\xi^2-\varphi^2)\rho^{-6} -$$
$$-4(3+\sigma)\xi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} + 2(21+\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 11 + \sigma);$$

$$2\pi R N_2^{(3)} \simeq -Q_3\varphi\rho^{-2};$$

$$16\pi R^2 T_1^{(4)} \simeq Q_4\varphi\rho^{-2}[2\xi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 6\xi^2\rho^{-2}+1],$$

$$16\pi R^2 T_2^{(4)} \simeq -Q_4\varphi\rho^{-2}[2\xi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 2(5+2\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 3 + 2\sigma],$$

$$8\pi R G_1^{(4)} \simeq -Q_4\varphi\rho^{-2}[2(1-\sigma)\xi^2\rho^{-2} - 1 - \sigma],$$

$$8\pi R G_2^{(4)} \simeq Q_4\varphi\rho^{-2}[2(1-\sigma)\xi^2\rho^{-2} + 1 + \sigma],$$

$$8\pi R^2 S_1^{(5)} \simeq -Q_5\varphi\rho^{-2}[2\xi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 2(3+\sigma-\sigma^2)\xi^2\rho^{-2} + 1 + \sigma - \sigma^2],$$

$$8\pi R^2 S_2^{(5)} \simeq Q_5\varphi\rho^{-2}[2\xi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-4} - 2(5-3\sigma+\sigma^2)\xi^2\rho^{-2} + 3 - 3\sigma + \sigma^2],$$

$$H^{(5)} = -H_2^{(5)} \simeq -(4\pi R)^{-1}Q_5\varphi\rho^{-2}(2\xi^2\rho^{-2}-1).$$

Четвертая группа асимптотических формул:

$$48\pi R^3 N_1^{(1)} \simeq (1+\sigma)h^2 Q_1 \rho^{-4}[\sigma\xi^2(\xi^4-6\xi^2\varphi^2+\varphi^4)\rho^{-4} - 10\xi^2(\xi^2-3\varphi^2)\rho^{-2} +$$
$$+3(\xi^2-\varphi^2)];$$

$$48\pi R^3 N_2^{(2)} \simeq h^2 Q_2 \rho^{-4}[2(1+\sigma)\varphi^2(9\xi^4 - 14\xi^2\varphi^2 + \varphi^4)\rho^{-4} -$$
$$-2(9+\sigma)\varphi^2(3\xi^2-\varphi^2)\rho^{-2} - (7-\sigma)(\xi^2-\varphi^2)];$$

$$Q_4^{-1}N_2^{(4)} \simeq Q_5^{-1}N_1^{(5)} \simeq (4\pi R^2)^{-1}\rho^{-4}(\xi^2-\varphi^2).$$

Пятая группа асимптотических формул:

$$24\pi R^3 N_2^{(1)} \simeq (1+\sigma)h^2 Q_1 \xi\varphi\rho^{-4}[2(3\xi^4 - 8\xi^2\varphi^2 + \varphi^4)\rho^{-4} - 10(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-2} + 3];$$

$$24\pi R^3 N_1^{(2)} \simeq h^2 Q_2 \xi\varphi\rho^{-4}[2(1+\sigma)(3\xi^4-8\xi^2\varphi^2+\varphi^4)\rho^{-4} +$$
$$+2(9+\sigma)(\xi^2-\varphi^2)\rho^{-2} + 7 - \sigma];$$

$$-2Q_4^{-1}N_1^{(4)} \simeq Q_5^{-1}N_2^{(5)} \simeq (\pi R^2)^{-1}\xi\varphi\rho^{-4}.$$

В этих формулах T_1, T_2 — нормальные усилия, а G_1, G_2 и H_1, H_2 — изгибающие и крутящие погонные моменты. Верхний индекс у перемещения или силового фактора является номером того компонента нагрузки, которому это перемещение или силовой фактор соответствует. Каждая из приведенных формул справедлива в окрестности точки ($\xi = 0$, $\varphi = 0$) приложения сосредоточенной нагрузки, за исключением, быть может, линии $\xi = 0$ и за исключением сколь угодно малых углов (со сторонами $\varphi / \xi = C \pm \varepsilon$), содержащих некоторые особые линии $\varphi / \xi = C$, вдоль которых правая часть данной формулы исчезает (вдоль такой линии у рассматриваемой величины понижается порядок роста).

Поступило
4 IX 1950