Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Б. А. РЫМАРЕНКО

ЕЩЕ О ПОЛИНОМАХ, МОНОТОННЫХ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 IX 1950)

В настоящей заметке рассматривается следующая задача, относящаяся к тому же кругу вопросов, что и в нашей заметке [1].

Найти наименьшую осцилляцию L_{2m+1} в промежутке $[-1, +1]$ полинома $y_{2m+1}(x) \in B_{2m+1}$ [1] при условиях, что

$$y'_{2m+1}(x_i) = s_i^2 \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p; \quad p \leqslant m), \tag{1}$$

где x_i и s_i — данные числа*.

В заметке [1] было показано, что

$$L_{2m+1} = \int\limits_{-1}^{+1} [u_m^2(x) + v_{m-1}^2(x)]\, dx; \tag{2}$$

условия (1) примут вид:

$$u_m^2(x_i) + v_{m-1}^2(x_i) = s_i^2. \tag{1'}$$

Введем параметры

$$\gamma_i = v_{m-1}(x_i), \tag{3}$$

подчиненные условиям:

$$s_i^2 - \gamma_i^2 \equiv \delta_i^2 \geqslant 0; \tag{4}$$

тогда (1') перепишем так:

$$u_m(x_i) = \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{5}$$

Задача сведется к обращению в минимум интеграла (2) при условиях (3) и (5).

Пользуясь обычными методами дифференциального исчисления, легко найдем:

$$L_{2m+1} = \sum_{i,j=1}^{p} (-1)^{i+j} \left[\delta_i \delta_j \frac{\Delta_{ij}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} + \gamma_i \gamma_j \frac{\Delta_{ij}^{(m-1)}}{\Delta^{(m+1)}}\right], \tag{6}$$

где $\Delta^{(m)}$ — определитель вида:

$$\Delta^{(m)} = \left\| c_{ij}^{(m)} \right\|_1^p,$$

* Рассматриваемая задача аналогична задаче о наилучшем квадратическом приближении [2].

$\Delta_{ij}^{(m)}$ — минор элемента $c_{ij}^{(m)} \equiv \sum_{k=0}^{m} \hat{P}_k(x_i)\,\hat{P}_k(x_j)$, а $\hat{P}_k(x)$ — нормированный полином Лежандра степени k. Остается так подобрать γ_i (удовлетворяющие условиям (4)), чтобы сумма (6) стала возможно малой.

Рассмотрим здесь два следующие предположения о числах x_i:

I. x_i — некоторые из корней полинома Лежандра $\hat{P}_m(x)$ (m — фиксированное число).

II. x_i — любые числа из промежутка $[-1, +1]$, причем $m \to \infty$, а p — конечное число.

В первом предположении $c_{ij}^{(m)} = 0$, если $i \neq j$, и, следовательно,

$$L_{2m+1} = \sum_{i=1}^{p} \left[\delta_i^2 \frac{\Delta_{ii}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} + \gamma_i^2 \frac{\Delta_{ii}^{(m-1)}}{\Delta^{(m-1)}} \right], \tag{7}$$

или, после несложных преобразований:

$$L_{2m+1} = \frac{\sqrt{(2m+1)(2m+3)}}{m+1} \sum_{i=1}^{p} \frac{s_i^2}{\hat{P}'_m(x_i)\,\hat{P}_{m+1}(x_i)}. \tag{7'}$$

Таким образом, в этом случае L_{2m+1} не зависит от γ_i и, следовательно, при любых допустимых γ_i (в частности, при $\gamma_i = 0$) минимум L_{2m+1} находится по формуле (7').

Во втором предположении, пользуясь асимптотическими формулами для полиномов Лежандра при $m \to \infty$ и $-1 < x_i < 1$, найдем:

$$\frac{\Delta_{ij}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \sim \frac{\Delta_{ij}^{(m-1)}}{\Delta^{(m-1)}} \sim \begin{cases} \dfrac{\pi}{m}\sqrt{1-x_i^2}, & \text{если} \quad i = j, \\[2ex] \dfrac{\pi^2}{m^2}\sqrt{(1-x_i^2)(1-x_j^2)}, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Повторяя вычисления, подобные предыдущим, найдем для L_{2m+1} асимптотическую формулу:

$$L_{2m+1} \sim \frac{\pi}{m} \sum_{i=1}^{p} s_i^2 \sqrt{1-x_i^2}, \tag{8}$$

справедливую также при любых допустимых γ_i (в частности, при $\gamma_i = 0$).

Следовательно, в обоих случаях полином, минимизирующий L_{2m+1}, не единственен; его можно искать среди полиномов вида

$$y_{2m+1}(x) = \int_{-1}^{x} u_m^2(x)\,dx. \tag{9}$$

В случае, когда $p = 1$, аналогичная задача была решена С. Н. Бернштейном [3] для $y_n(x) \in T_n$ [1] при любых n.

Поступило
17 VIII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Рымаренко, ДАН, **71**, № 6 (1950). [2] Б. А. Рымаренко, Тр. 2-го Всесоюзн. съезда математ., **2** (1936). [3] С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales, Paris, 1926, стр. 48—50.