Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 6

МАТЕМАТИКА

М. Ф. ШИРОХОВ

ФУНКЦИИ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 VII 1950)

Любое полуупорядоченное пространство, как показано в монографии Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера ([1]), изоморфно подпространству некоторого пространства разложений. Таким образом, определение функций от разложений с помощью этого изоморфизма естественным образом доставляет определение функций от элементов полуупорядоченного пространства. В той же монографии дано определение непрерывных функций от разложений и с помощью указанного выше изоморфизма получено определение непрерывных функций от элементов полуупорядоченных пространств.

В настоящей заметке сообщается другой непосредственный способ определения функций от разложений, а тем самым и от элементов полуупорядоченных пространств, охватывающий все непрерывные и некоторые разрывные функции.

Определение 1. Разложением называется функция $e(\lambda)$ от вещественного аргумента, заданная для всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, со значениями в полной алгебре Буля ([1]) и удовлетворяющая следующим условиям:

$$1)\ \text{если } \lambda < \mu, \text{ то } e(\lambda) \leqslant e(\mu),$$

$$2)\ \sup_\lambda e(\lambda) = 1, \quad \inf_\lambda e(\lambda) = 0, \tag{1}$$

где supremum и infimum берутся по всем $\lambda \in (-\infty, +\infty)$.

Будем обозначать разложение символами $x, y, \ldots$

Будем применять еще другое обозначение для разложений $e(x \lhd \lambda)$, понимая под этим элемент алгебры, соответствующий числу λ в разложении x.

Определим частичное упорядочение множества разложений следующим образом: будем говорить, что $x \leqslant y$, если при всяких λ и μ таких, что $\lambda > \mu$, будет выполнено $e(x \lhd \lambda) \geqslant e(y \lhd \mu)$.

Будем говорить, что разложения x и y эквивалентны и записывать $x \equiv y$, если выполняются одновременно оба соотношения $x \leqslant y$ и $x \geqslant y$.

Отношение эквивалентности определяет разбиение множества разложений на классы эквивалентных разложений. В каждом классе эквивалентных разложений существуют два предельных разложения, определяемые следующим образом:

$$e(x < \lambda) = \sup_{\mu < \lambda} e(x \lhd \mu), \quad e(x \leqslant \lambda) = \inf_{\mu > \lambda} e(x \lhd \mu).$$

Имея определение разложения $e(x \lhd \lambda)$, можно также определить следующие выражения:

$$e(x \rhd \lambda) = Ce(x \lhd \lambda), \quad e(\lambda \lhd x \lhd \mu) = e(x \lhd \mu) \wedge e(x \rhd \lambda),$$

$$e(\lambda \leqslant x \leqslant \mu) = e(x \leqslant \mu) \wedge Ce(x < \lambda), \quad e(\lambda < x < \mu) = e(x < \mu) \wedge Ce(x \leqslant \lambda).$$

Определение функции от разложений для простоты изложим для случая функции двух аргументов. При соответствующих изменениях в формулировках оно пригодно и для случая функции от любого конечного числа аргументов.

Определение 2. Множество точек на плоскости E называется множеством нулевого веса относительно разложений x и y, если существует последовательность элементов алгебры $\{e_n\}$ такая, что: 1) $e_n \geqslant e_{n+1}$, 2) $\inf\limits_n e_n = 0$; 3) для любого e_n найдется покрытие множества E интервалами $(a, b; c, d)$ такое, что

$$\sup [e(a \leqslant x \leqslant b) \wedge e(c \leqslant y \leqslant d)] \leqslant e_n,$$

где supremum берется по всем интегралам покрытия множества E.

Определение 3. Пусть $F(u, v)$ — вещественная конечная функция, заданная на всей плоскости, непрерывная везде за исключением множества E нулевого веса относительно разложений x и y. Определим функцию F от разложений x и y следующим образом:

$$e(F(x, y) \lhd \lambda) = \sup [e(a \lhd x \lhd b) \wedge e(c \lhd y \lhd d)],$$

где supremum берется по всем интервалам $(a, b; c, d)$ таким, что $(a, b; c, d) \subset \underset{(u,v)}{\mathcal{E}} (F(u, v) < \lambda)$.

Теорема 1. *Определение* 3 *доставляет разложение, т. е.* $e(F(x, y) \lhd \lambda)$ *удовлетворяет условиям* (1).

Доказательство. Первое условие проверяется непосредственно. Проверим выполнение второго из условий (1).

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $E_1 = \underset{(u,v)}{\mathcal{E}} (\omega_F(u, v) \geqslant \varepsilon)$*. Так как $E_1 \subset E$, то E_1 можно покрыть интервалами $(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$ так, чтобы было $\sup [e(\bar{a} \leqslant x \leqslant \bar{b}) \wedge e(\bar{c} \leqslant y \leqslant \bar{d})] \leqslant e_n$, где supremum берется по всем интервалам покрытия множества E_1, а e_n — произвольно выбранный элемент из последовательности элементов алгебры, указанной в определении 2.

Возьмем произвольный сегмент $[A, B; C, D]$. Пересечение E_1 с этим сегментом есть замкнутое ограниченное множество и, следовательно, покрывается конечным числом интервалов из покрытия E_1. Дополнение суммы этих интервалов до сегмента $[A, B; C, D]$ есть замкнутое ограниченное множество, во всех точках которого $\omega_F(u, v) < \varepsilon$ и, следовательно, на нем функция $F(u, v)$ ограничена. Поэтому при достаточно большом λ будем иметь

$$e(A < x < B) \wedge e(C < y < D) \wedge Ce_n \leqslant e(F(x, y) \lhd \lambda).$$

Так как сегмент $[A, B; C, D]$ и e_n любые, то $\sup\limits_\lambda e(F(x, y) \lhd \lambda) = 1$. Аналогично показывается, что $\inf\limits_\lambda e(F(x, y) \lhd \lambda) = 0$.

* $\omega_F(u, v)$ означает колебание функции $F(u, v)$ в точке (u, v).

Теорема 2. *Если* $x \equiv x_1$ *и* $y \equiv y_1$, *то* $F(x, y) \equiv F(x_1, y_1)$.

Теорема 3. *Пусть* $F(u, v)$ *и* $\Phi(u, v)$ — *вещественные конечные функции, заданные на всей плоскости, непрерывные всюду за исключением множества* E_1 *нулевого веса относительно разложений* x *и* y.

Тогда:

1) *если* $F(u, v) = \Phi(u, v)$ *везде за исключением множества* E_2 *нулевого веса относительно разложений* x *и* y, *то* $F(x, y) \equiv \Phi(x, y)$;

2) *если* $F(x, y) \equiv \Phi(x, y)$, *то* $F(u, v) = \Phi(u, y)$ *везде за исключением множества* E_2 *нулевого веса относительно разложений* x *и* y.

Доказательство. 1) Пусть $F(u, v) = \Phi(u, v)$ везде за исключением множества E_2 нулевого веса относительно разложений x и y. Покажем, что если $\lambda < \mu$, то

$$e(F(x, y) \lhd \lambda) \leqslant e(\Phi(x, y) \lhd \mu), \quad e(F(x, y) \lhd \mu) \geqslant e(\Phi(x, y) \lhd \lambda).$$

Докажем, например, первое соотношение; второе доказывается аналогично.

Положим $E_1 \cup E_2 = E$ и $\mu - \lambda = 4\varepsilon$. Легко видеть, что множество E есть множество нулевого веса относительно разложений x и y. Пусть $\{e_n\}$ есть соответствующая последовательность элементов алгебры, указанная в определении 2. Возьмем произвольное e_n из этой последовательности и покроем каждую точку множества E интервалом $(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$ так, чтобы было $\sup\left[e(\bar{a} \leqslant x \leqslant \bar{b}) \wedge e(\bar{c} \leqslant y \leqslant \bar{d})\right] \leqslant e_n$, где supremum берется по всем интервалам покрытия множества E. Положим

$$E_3' = \underset{(u, v)}{\mathcal{E}}(\omega_F(u, v) \geqslant \varepsilon), \quad E_3'' = \underset{(u, v)}{\mathcal{E}}(\omega_\Phi(u, v) \geqslant \varepsilon),$$

$$E_4 = \underset{(u, v)}{\mathcal{E}}(|F(u, v) - \Phi(u, v)| \geqslant 3\varepsilon).$$

Возьмем произвольный сегмент $[A, B; C, D]$. Пересечение его с множеством $E_3 = E_3' \cup E_3''$ замкнуто и ограничено и, следовательно, покрывается конечным числом интервалов $(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$. Дополнение этого конечного покрытия до сегмента $[A, B; C, D]$ обозначим через E_5. $E_5 \cap \overline{E}_4 \subset E_2$, поэтому $E_5 \cap \overline{E}_4$ покрывается конечным числом интервалов $(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$. Во всех точках дополнения этого второго конечного покрытия до E_5 выполняется $|F(u, v) - \Phi(u, v)| < 3\varepsilon$. Таким образом получаем, что

$$e(F(x, y) \lhd \lambda) \wedge e(A < x < B) \wedge e(C < y < D) \wedge Ce_n \leqslant$$
$$\leqslant e(\Phi(x, y) \lhd \mu) \wedge e(A < x < B) \wedge e(C < y < D) \wedge Ce_n;$$

остается воспользоваться произвольностью сегмента $[A, B; C, D]$ и элемента e_n.

2) Пусть $F(x, y) \equiv \Phi(x, y)$ и множеству E_1 точек возможного разрыва функций $F(u, v)$ и $\Phi(u, v)$ соответствует последовательность $\{e_n\}$ согласно определению 2. Покажем, что каждую точку (u_0, v_0), в которой $F(u_0, v_0) \neq \Phi(u_0, v_0)$, можно окружить интервалом $(a, b; c, d)$ так, чтобы было $e(a \leqslant x \leqslant b) \wedge e(c \leqslant y \leqslant d) \leqslant e_n$.

Если в точке (u_0, v_0) хотя бы одна из функций разрывна, то доказываемое соотношение непосредственно следует из предположения.

Пусть в точке (u_0, v_0) обе функции непрерывны и пусть, например, $F(u_0, v_0) < \Phi(u_0, v_0)$. Положим $\Phi(u_0, v_0) - F(u_0, v_0) = 3\varepsilon$. По непрерывности точку (u_0, v_0) можно окружить интервалом $(a, b; c, d)$

так, что для всех точек интервала $(a-\delta,\ b+\delta;\ c-\delta,\ d+\delta)$, где $\delta > 0$, будут выполняться неравенства:

$$F(u,\ v) < F(u_0,\ v_0)+\varepsilon, \quad \Phi(u,\ v) > \Phi(u_0,\ v_0)-\varepsilon.$$

Положим $\lambda = F(u_0,\ v_0)+\varepsilon$; $\mu = \Phi(u_0,\ v_0)-\varepsilon$. Так как $\lambda < \mu$, то, по условию, $e(F(x,\ y) \triangleleft \lambda) \leqslant e(\Phi(x,\ y) \triangleleft \mu)$, и поэтому

$$e(a \leqslant x \leqslant b) \wedge e(c \leqslant y \leqslant d) = e(a \leqslant x \leqslant b) \wedge e(c \leqslant y \leqslant d) \wedge e(F(x,y) \triangleleft \lambda) \leqslant$$
$$\leqslant e(a \leqslant x \leqslant b) \wedge e(c \leqslant y \leqslant d) \wedge e(\Phi(x,\ y) \triangleleft \mu) \leqslant e_n.$$

Из теоремы 3 непосредственно следует

Теорема 4. *Пусть* $F_{1k}(u,\ v)$, $F_{2k}(u,\ v)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, $\Phi_1(u,\ v)$, $\Phi_2(u,\ v)$ *суть вещественные конечные функции, заданные на всей плоскости, непрерывные везде за исключением множества* E *нулевого веса относительно разложений* x *и* y. *Тогда, если равенства* $F_{1k}(u,v)=F_{2k}(u,\ v)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ *влекут равенство* $\Phi_1(u,v)=\Phi_2(u,v)$, *то соотношения* $F_{1k}(x,y) \equiv F_{2k}(x,y)$ $(k=1,2,\ldots m)$ *влекут соотношение* $\Phi_1(x,\ y) \equiv \Phi_2(x,\ y)$.

Следствия. 1) Пусть $\Psi(u,\ v)$, $\Phi(u,\ v)$, $F_1(u,\ v)$, $F_2(u,\ v)$ суть вещественные конечные функции, заданные на всей плоскости, непрерывные везде за исключением множества E нулевого веса относительно разложений x и y. Тогда, если $\Psi(u,\ v)=\Phi(F_1(u,\ v),\ F_2(u,\ v))$ тождественно, то $\Psi(x,\ y) \equiv \Phi(F_1(x,\ y),\ F_2(x,\ y))$.

2) Если имеется какое-либо тождество в области вещественных чисел, в левой и правой частях которого стоят суперпозиции вещественных конечных функций, непрерывных везде за исключением множества E нулевого веса относительно разложений x и y, то его левая и правая части, примененные к разложениям x и y, эквивалентны друг другу.

Поступило
27 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, 1950.