Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 6

МАТЕМАТИКА

М. К. ФАГЕ

СПРЯМЛЕНИЕ БАЗИСОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 VIII 1950)

В этой заметке: 1) вводятся понятия биортогональной системы подпространств и базиса $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ из подпространств в произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{E}$ (что является обобщением понятий векторных биортогональных систем и базисов) и устанавливается связь этих понятий с идемпотентными разложениями единицы (и.р.е.) (§ 1) ([3]); 2) указывается операторная форма, обобщение и условие сходимости ортогонализационного процесса Шмидта (§ 2); обычный случай ортогонализации получается, когда $\mathcal{E}$ — сепарабельное, а все $\mathfrak{H}_n$ — одномерные (§ 3).

§ 1. Пару счетных последовательностей подпространств $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{G}_n\}_1^\infty$ в $\mathcal{E}$ назовем биортогональной системой подпространств, а системы $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{G}_n\}_1^\infty$ — сопряженными одна другой, если: 1°. $\mathfrak{H}_n \perp \mathfrak{G}_m$ при $n \neq m$; 2°. $\mathfrak{H}_n$ и $\mathfrak{G}_n$ определяют идемпотентный оператор $J_n = \mathfrak{H}_n \times \mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ([3]). В силу теоремы 1 из ([3]) при наличии условия 2° условие 1° равносильно операторной ортогональности $J_n J_m = 0$ при $n \neq m$.

Последовательность $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ назовем б а з и с о м $\mathcal{E}$, если всякий вектор $x \in \mathcal{E}$ единственным образом раскладывается в сходящийся по норме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ с $x_n \in \mathfrak{H}_n$. Из теоремы 7 главы III книги Банаха ([1]) следует, что соответствие $x_n = J_n x$ определяет идемпотентный оператор J_n, для которого $\mathfrak{H}_n$ является неподвижным подпространством ([3]); при этом $J_n J_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n x = x$ для всех $x \in \mathcal{E}$, т. е. $\{J_n\}_1^\infty$ есть и.р.е. (см. ([3]), § 2). Но тогда (([3]), теорема 6) и последовательность сопряженных операторов $\{J_n^*\}_1^\infty$ образует и.р.е., следовательно, их неподвижные подпространства $\mathfrak{G}_n$ образуют (единственный) базис, сопряженный с $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$. Итак, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Для всякого базиса $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ существует единственная сопряженная система $\{\mathfrak{G}_n\}_1^\infty$, являющаяся также базисом $\mathcal{E}$. Соответствующие идемпотентные операторы $J_n = \mathfrak{H}_n \times \mathfrak{G}_n$ образуют* ***и.р.е.***

Очевидно, что всякое и.р.е. $\{J_n = \mathfrak{H}_n \times \mathfrak{G}_n\}_1^\infty$ определяет два базиса $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ и $\{\mathfrak{G}_n\}$, сопряженные друг другу.

§ 2. Ортогонализационный процесс Шмидта в применении к линейно независимой системе векторов (в частности, к базису сепарабельного гильбертова пространства) $\{h_n\}_1^\infty$ состоит, как известно, в последовательном построении векторов

$$e_1 = \alpha_{11} h_1, \quad \ldots, \quad e_n = \alpha_{n1} h_1 + \ldots + \alpha_{nn} h_n, \tag{1}$$

каждый из которых (e_n) перпендикулярен к уже построенным $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Пусть теперь $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ есть произвольный базис $\mathcal{E}$, $\{\mathfrak{G}_n\}_1^\infty$ — ему сопряженный базис, $\{I_n = \mathfrak{H}_n \times \mathfrak{G}_n\}_1^\infty$ — соответствующее и.р.е. Спроектировав $\mathfrak{G}_n$ на сумму $\mathfrak{H}^{(n)} = \mathfrak{H}_1 + \ldots + \mathfrak{H}_n$ первых n подпространств данного базиса $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$, мы получим в $\mathfrak{H}^{(n)}$ линейное многообразие $\mathcal{E}_n = H^{(n)} \mathfrak{G}_n$ ($H^{(n)}$ — проектор на $\mathfrak{H}^{(n)}$), являющееся замкнутым, так как, по теореме 2 из ([3]), имеется обратное линейное преобразование $\mathcal{E}_n$ на $\mathfrak{G}_n$, осуществляемое идемпотентным оператором $J^{(n)*} = J_1^* + \ldots + J_n^*$, где через $J^{(n)}$ обозначена сумма $J_1 + \ldots + J_n$, являющаяся идемпотентным оператором вида $\mathfrak{H}^{(n)} \times \mathfrak{G}^{(n)}$, причем $\mathfrak{G}^{(n)} = \mathfrak{G}_1 + \ldots + \mathfrak{G}_n$. Итак, $\mathcal{E}_n$ есть подпространство.

Теорема 2. 1°. *$\mathcal{E}_n$ есть ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}^{(n)}$ к $\mathfrak{H}^{(n-1)}$, коротко: $\mathcal{E}_n = \mathfrak{H}^{(n)} \ominus \mathfrak{H}^{(n-1)}$; 2° $\mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_n = \mathfrak{H}^{(n)} = \mathfrak{H}_1 + \ldots + \mathfrak{H}_n$ (здесь $\oplus$ означает сложение ортогональных подпространств); 3°. $\{\mathcal{E}_n\}_1^\infty$ есть ортогональный („самосопряженный") базис $\mathcal{E}$.*

Доказательство. 2° следует из 1°; 3° следует из 2° и того, что $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ есть базис; остается доказать 1°. Прежде всего, очевидно, $\mathcal{E}_n \subset \mathfrak{H}^{(n)}$ по построению. Далее, $\mathcal{E}_n \perp \mathfrak{H}^{(n-1)}$: пусть $e \in \mathcal{E}_n$, $h \in \mathfrak{H}^{(n-1)}$; тогда $e = H^{(n)} g$, где $g \in \mathfrak{G}_n$, и, следовательно, $(e, h) = (H^{(n)} g, h) = (g, H^{(n)} h) = (g, h)$, последнее — в силу $\mathfrak{H}^{(n-1)} \subset \mathfrak{H}^{(n)}$; но $g \perp h$, так как $\mathfrak{G}_n \perp \mathfrak{H}^{(n-1)}$; следовательно, $(e, h) = (g, h) = 0$, т. е. $\mathcal{E}_n \perp \mathfrak{H}^{(n-1)}$; таким образом, $\mathcal{E}_n \subset \mathfrak{H}^{(n)} \ominus \mathfrak{H}^{(n-1)}$. Докажем обратное включение: пусть $f \in \mathfrak{H}^{(n)} \ominus \mathfrak{H}^{(n-1)}$; определим $g = J^{(n)*} f \in \mathfrak{G}^{(n)}$; тогда, по теореме 2 из ([3]), уже имеем $f = H^{(n)} g$, и остается показать, что $g \in \mathfrak{G}_n$, т. е., что $J_n^* g = g$; так как $g \in \mathfrak{G}^{(n)}$ — неподвижному подпространству оператора $J^{(n)*} = J^{(n-1)*} + J_n^*$, то $J^{(n)*} g = g$, и остается проверить, что $J^{(n-1)*} g = 0$, т. е., по теореме 1 из ([3]), что $g \perp \mathfrak{H}^{(n-1)}$; пусть $h \in \mathfrak{H}^{(n-1)}$, тогда $(g, h) = (J^{(n)*} f, h) = (f, J^{(n)} h) = (f, h) = 0$, в силу выбора f. 1° доказано.

Теперь построим линейные операторы $A_1, A_2, \ldots$, которые в своей совокупности обобщают преобразование (1); A_n будет обобщать преобразование, определяемое первыми n равенствами (1).

Теорема 3. 1°. *Оператор $A_n = \sum_{k=1}^{n} H^{(k)} J_k^* J_k$ отображает взаимно-однозначно и линейно подпространство $\mathfrak{H}^{(n)} = \mathfrak{H}_1 + \ldots + \mathfrak{H}_n$ на себя, причем подпространства $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ преобразуются соответственно в $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$, т. е. $\mathcal{E}_k = A_n \mathfrak{H}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). 2°. Оператор $A_{n+1} = A_n + H^{(n+1)} J_{n+1}^* J_{n+1}$ является „продолжением" оператора A_n в том смысле, что $A_{n+1} x = A_n x$ при $x \in \mathfrak{H}^{(n)}$. 3°. Обратное к A_n отображение $\mathfrak{H}^{(n)}$ на себя дает оператор $B_n = \sum_{k=1}^{n} H_k J^{(k)*} E_k$. 4°. B_{n+1} в том же смысле „продолжает" B_n, т. е. $B_{n+1} x = B_n x$ при $x \in \mathfrak{H}^{(n)}$.*

Здесь H_k, $H^{(k)}$ и E_k суть проекторы соответственно на $\mathfrak{H}_k$, $\mathfrak{H}^{(k)}$ и $\mathcal{E}_k$.

Доказательство. Докажем сначала 2°: если $x \in \mathfrak{H}^{(n)}$, то $J_{n+1}x = 0$ и, следовательно, $A_{n+1}x = A_n x$. Аналогично доказывается 4°. Теперь для доказательства 1° и 3° достаточно установить, что A_n и B_n взаимно-обратно преобразуют $\mathfrak{H}_n$ на $\mathcal{E}_n$: пусть $x \in \mathfrak{H}_n$; тогда $J_k x = 0$ при $k < n$ и, следовательно, $y = A_n x = H^{(n)} J_n^* J_n x$, где $J_n x = x$, $J_n^* J_n x \in \mathfrak{G}_n$ и поэтому $y \in \mathcal{E}_n$ (по определению $\mathcal{E}_n$); наоборот, если $y \in \mathcal{E}_n$, то $E_k y = 0$ при $k < n$, $E_n y = y$, и поэтому $B_n y = H_n J^{(n)*} y$. Таким образом, остается доказать равенства $H_n J^{(n)*} H^{(n)} J_n^* x = x$ при $x \in \mathfrak{H}_n$ и $H^{(n)} J_n^* H_n J^{(n)*} y = y$ при $y \in \mathcal{E}_n$; но оба они следуют из теоремы 2 в (3), применяя которую к доказательству второго равенства нужно иметь в виду, что $J^{(n)*} y \in \mathfrak{G}_n$, как это было отмечено при построении $\mathcal{E}_n$. Теорема доказана.

Аналогично строится спрямление сопряженного базиса $\{\mathfrak{G}_n\}_1^\infty$: проектированием $\mathfrak{H}_n$ на $\mathfrak{G}^{(n)} = \mathfrak{G}_1 + \ldots + \mathfrak{G}_n$ получается соответствующий ортогональный базис из подпространств $F_n = G^{(n)} \mathfrak{H}_n$, причем $\mathfrak{H}_n = J^{(n)} F_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Выясним теперь вопрос о сходимости описанного спрямляющего процесса. Под этим будет подразумеваться сходимость (по норме векторов) операторов A_n и B_n к ограниченным операторам $A = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)} J_n^* J_n$, соответственно $B = \sum_{n=1}^{\infty} H_n J^{(n)*} E_n$. Если это имеет место, то на основании свойства „продолжения" операторы A и B взаимнооднозначно отображают $\mathfrak{H}_n$ на $\mathcal{E}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, всё $\mathcal{E}$ на себя. Таким образом, под сходимостью этого процесса можно понимать существование взаимно-обратных линейных операторов A и B, продолжающих все A_n, соответственно B_n, в том смысле, что $Ax = A_n x$, $Bx = B_n x$ при $x \in \mathfrak{H}^{(n)}$ и любом $n = 1, 2, \ldots$ Базис $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$, вообще допускающий линейное обратимое преобразование в ортогональный базис, назовем спрямляемым.

Итак, сходимость спрямляющего процесса теоремы 3 влечет спрямляемость базиса.

Обратно, пусть $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ спрямляем и, следовательно, спрямляемо соответствующее и.р.е. $\{J_n = \mathfrak{H}_n \times \mathfrak{G}_n\}_1^\infty$.

По теореме 7 из (3), существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $x \in \mathcal{E}$ выполняются неравенства $C^{-1}\|x\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|J_n x\|^2 \leqslant C\|x\|^2$. Далее заметим, что из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} J_n x = x$ для всех $x \in \mathcal{E}$ следует ограниченность норм $|J_1 + \ldots + J_n| \leqslant D$, откуда $|J_n| \leqslant 2D$. Теперь докажем существование для всякого $x \in \mathcal{E}$ предела $\lim_{n\to\infty} A_n x = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)} J_n^* J_n x = Ax$. Определим $h_n = J_n x \in \mathfrak{H}_n$, $g_n = J_n^* h_n \in \mathfrak{G}_n$, $e_n = H^{(n)} g_n = H^{(n)} J_n^* h_n \in \mathcal{E}_n$; отсюда $\|e_n\| \leqslant |H^{(n)}| \cdot |J_n^*| \cdot \|h_n\| \leqslant 2 \cdot D \cdot \|h_n\|$. Далее, по теореме 2 из (3), $g_n = J^{(n)*} e_n$, $h_n = H_n g_n$ и, следовательно, $\|h_n\| \leqslant |H_n| \cdot |J^{(n)*}| \cdot \|e_n\| \leqslant D \cdot \|e_n\|$. Из этих оценок получим $D^{-2}C^{-1}\|x\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 \leqslant 4D^2 C\|x\|^2$. Отсюда и следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} e_n = Ax = y$, причем оператор $A = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)} J_n^* J_n$ ограничен и имеет ограниченный обратный $A^{-1}=B$, $x=By$. Так как A-образ $\mathfrak{H}_n$ есть $\mathcal{E}_n$, то A-образ всего $\mathcal{E}$ всюду плотен в $\mathcal{E}$ и, следовательно, оператор B, как ограниченный и замкнутый, определен на всем $\mathcal{E}$. Покажем, что $B=\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n J^{(n)*} E_n$. Действительно, применяя к $y=Ax=\sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k$ оператор B_n, получим $B_n y=\sum\limits_{k=1}^{n} H_k J^{(k)*} e_k=\sum\limits_{k=1}^{n} h_k \to x=By$ при $n\to\infty$, т. е. $B=\lim\limits_{n\to\infty} B_n$. Итак, доказана теорема 4.

Теорема 4. *Для сходимости спрямляющего процесса теоремы 3 необходимо и достаточно, чтобы данный базис $\{\mathfrak{H}_n\}_1^{\infty}$ был спрямляемым, что равносильно спрямляемости соответствующего и.р.е. $\{J_n=\mathfrak{H}_n\times\mathfrak{G}_n\}_1^{\infty}$.*

Так как $\{J_n\}_1^{\infty}$ спрямляемо одновременно с $\{J_n^*\}_1^{\infty}$, то сходимость спрямляющего процесса будет иметь место одновременно и у данного базиса $\{\mathfrak{H}_n\}_1^{\infty}$ и у ему сопряженного $\{\mathfrak{G}_n\}_1^{\infty}$.

§ 3. Для векторного базиса $\{h_n\}_1^{\infty}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{E}$ (например, в $L_{[0,1]}^{(2)}$) из теоремы 4 и замечания в конце статьи ([3]) следует теорема 5.

Теорема 5. *Для сходимости ортогонализационного процесса Шмидта* (1) *необходимо и достаточно, чтобы векторы h_n ($n=1, 2, \ldots$), с точностью до постоянных не равных нулю множителей, составляли базис Рисса* ([2]). *При этом для того, чтобы нормы $\|e_n\|$ удовлетворяли неравенствам $0<\alpha<\|e_n\|<\beta$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{h_n\}_1^{\infty}$ была уже базисом Рисса.*

Здесь под сходимостью ортогонализационного процесса Шмидта понимается существование ограниченного и обратимого линейного оператора A, «продолжающего» соответствие $Ah_n=e_n$ ($n=1, 2, \ldots$).

Черновицкий государственный университет

Поступило 12 VIII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [2] Н. К. Бари, ДАН, 54, № 5 (1946). [3] М. К. Фаге, ДАН, 73, № 5 (1950).